Sessione ordinaria 2017
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

Figura 1

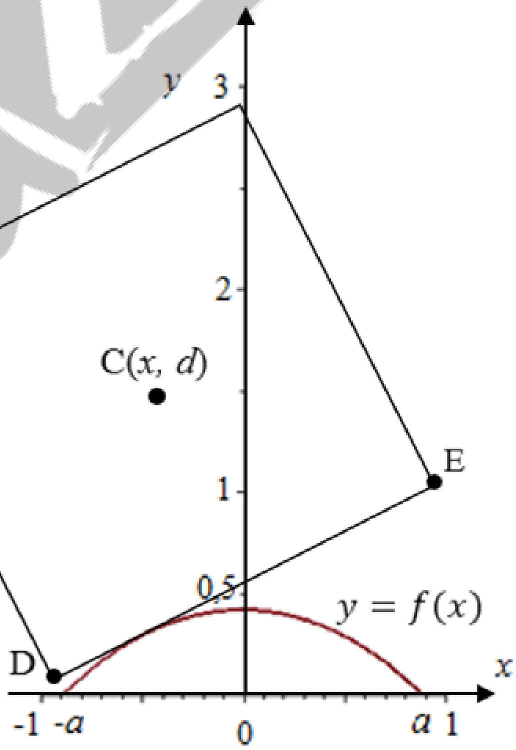

Figura 2

1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a\,;\,a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a\,;\,a]$, come mostrato in figura 3.

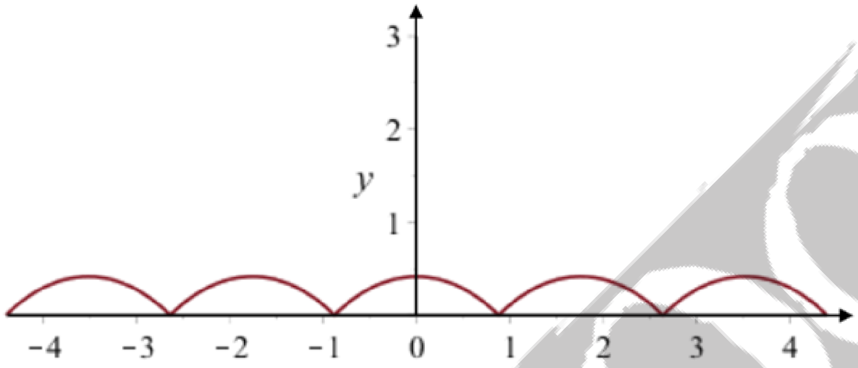

Figura 3

2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a;\, a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.[1]

3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

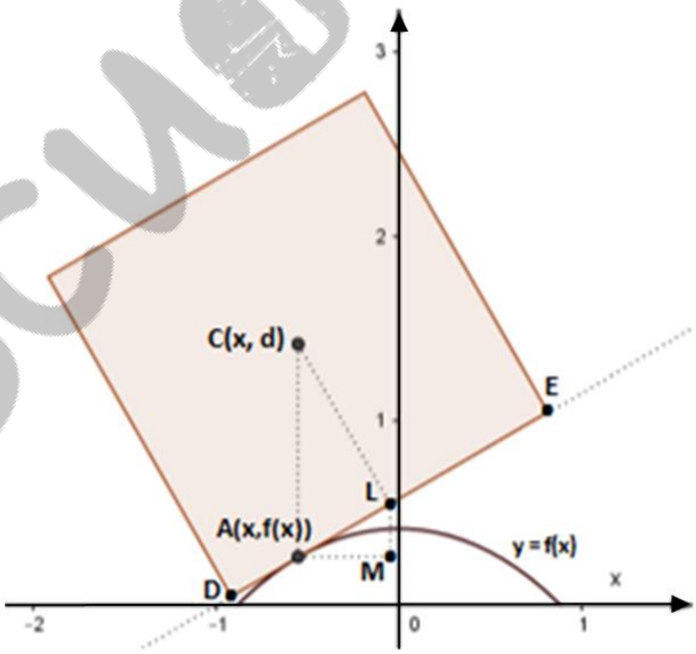

Figura 4

[1]In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$.

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{ln(3)}{2}; \frac{ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

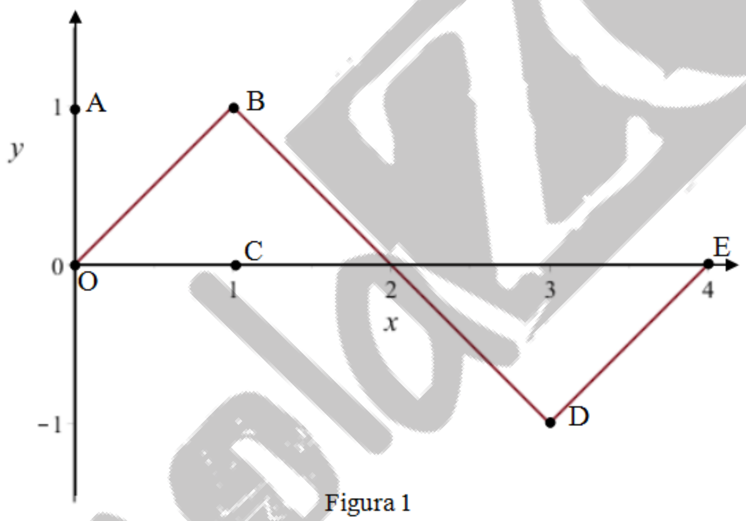

Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt.$$

2) Considera la funzione:

$$s(x) = sen(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.

Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x.

QUESTIONARIO

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 xe^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E.

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

3. Sapendo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b.

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0, 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?
Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?
Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5. Dati i punti $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x+2y-z+1=0$$

nel suo punto P di coordinate $(1,0,2)$.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:

$$arctg(x)+x^3+e^x=0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x)=|4-x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3;3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3;3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Scuolazoo

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.