Soluzioni dei quesiti della maturità scientifica A.S. 2011/2012

Nicola Gigli [*] Sun-Ra Mosconi [†]

June 21, 2012

Quesito n.1
Il limite in questione é la derivata della funzione $f(x) = 5x^4$ nel punto $x = \frac{1}{2}$. Essendo $f'(x) = 20x^3$, il suo valore é $\frac{5}{2}$.

Quesito n.2
Un *asintoto obliquo* a $+\infty$ per una funzione f definita in un intorno di $+\infty$ é una retta $r(x)$ per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - r(x) = 0,$$

ed analogamente per gli asintoti obliqui a $-\infty$. Quando il coefficiente angolare di $r(x)$ é zero, si parla di *asintoto orizzontale*. Un *asintoto verticale da destra* in x_0 per una funzione definita in un intorno destro di x_0 eccetto $\{x_0\}$ consiste nella retta verticale di equazione $x = x_0$ quando il limite da destra di f in x_0 esista e valga

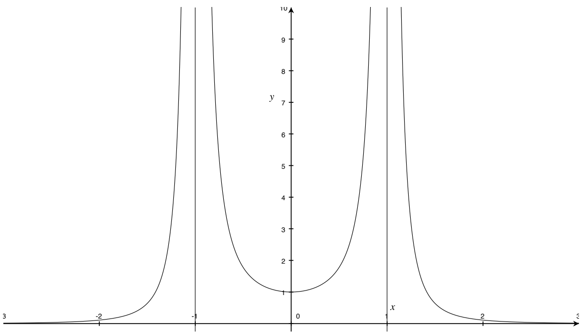
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty,$$

e analoga definizione per gli asintoti verticali da sinistra. Se $x = x_0$ é asintoto verticale sia da destra che da sinistra e i limiti destri e sinistri a x_0 coincidono, allora si dice brevemente che é un *asintoto verticale*. Un esempio di funzione che presenti un asintoto orizzontale e due verticali é

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2},$$

che ha $y = 0$ come asintoto orizzontale (sia a $+\infty$ che a $-\infty$) e $x = 1$ e $x = -1$ come asintoti verticali (la funzione é continua in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$). Il grafico é riportato in figura.

[*]Università di Nizza
[†]Università di Catania



Quesito n.3

L'accelerazione della particella é pari alla derivata seconda della sua funzione posizione. Si ha

$$s'(x) = 20(1 - e^{-\frac{t}{2}}), \qquad s''(x) = 10e^{-\frac{t}{2}},$$

e quindi la sua accelerazione é $s''(4) = 10/e^2$.

Quesito n.4

Sia r il raggio di base del cono ed h la sua altezza. Il suo volume é allora $\pi r^2 h/3$. Essendo l'apotema 1, per il teorema di Pitagora raggio di base ed altezza soddisfano $r^2 + h^2 = 1$ e quindi possiamo esprimere il volume del cono in base alla sua altezza come $V(h) = \frac{\pi}{3}(1 - h^2)h$. Studiando la cubica ottenuta si ha $V' = \frac{\pi}{3}(1 - 3h^2)$, che risulta positiva se e solo se $h \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. La funzione V, considerata solo per valori nonnegativi di h, ha quindi un massimo globale in $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dove assume valore $V_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$, espresso in metri cubi. La capacitá massima espressa in litri é quindi $\frac{2000\pi}{9\sqrt{3}}$.

Quesito n.5

In base alle condizioni poste un segmento é univocamente determinato da una coppia non ordinata di punti, un triangolo da una terna non ordinata e un tetraedro da una quaterna non ordinata. Essendo i punti n, ricordando la definizione combinatorica del coefficiente binomiale e indicando con # la cardinalitá dell'insieme, si ha

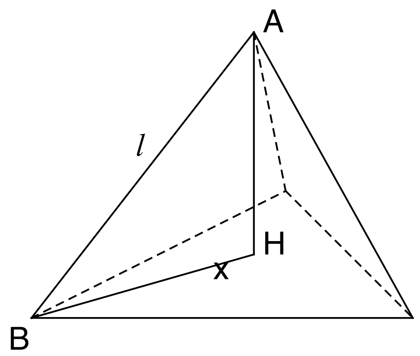
$$\#\{\text{segmenti}\} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\#\{\text{triangoli}\} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$
$$\#\{\text{tetraedri}\} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Quesito n.6
Utilizzando le formule di duplicazione

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

si ottiene $f(x) = -17$, la cui derivata é zero.

Quesito n.7
Sia x la distanza fra il piede H di un'altezza AH e uno spigolo B della faccia a cui appartiene H.



Essendo il tetraedro regolare, la faccia corrispondente é un triangolo equilatero di lato l e H, per simmetria, é il baricentro di tale triangolo. L'altezza del triangolo é $k = \sqrt{3}2l$, che viene divisa dal baricentro in due parti, una il doppio dell'altra. Quindi $x = \frac{2}{3}k$, ossia $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Essendo il triangolo ABH rettangolo in H, l'angolo α fra l ed h espresso in radianti soddisfa $l\sin\alpha = x$, da cui $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'angolo cercato in gradi sessagemsimali é perció

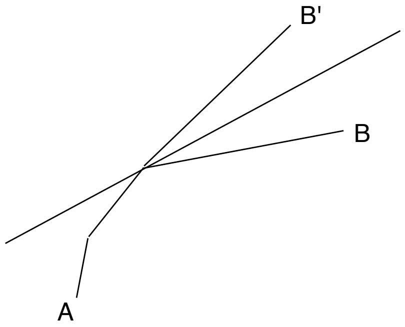
$$\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 35°26'.$$

Quesito n.8
Si ha

$$\fint_1^e f dx = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}dx = \frac{1}{e-1}.$$

Quesito n.9
Supponiamo di partire da A e consideriamo il punto B' simmetrico rispetto alla retta r di B. Qualsiasi percorso da A e B che tocchi r fornisce un percorso di medesima lunghezza da A a B', riflettendo attorno a r tutto il percorso dal primo punto di contatto con r. Viceversa qualsiasi percorso da A a B' tocca

necessariamente r e fornisce un percorso da A a B di medesima lunghezza riflettendo attorno a r tutto il percorso dal primo punto di contatto a B'.



Quindi il problema di Erone é equivalente alla determinazione del percorso minimo da A a B' senza alcun vincolo, che chiaramente é il segmento $\overline{AB'}$. Per le proprietá della riflessione, il percorso migliore consiste quindi in due segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, con $C \in r$ determinato univocamente dalla condizione che gli angoli che r forma con i segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ siano uguali.

Quesito n.10

L'unica funzione positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ é la A. Infatti, posto $z = x^2 + 1$, si ha $-1 \leq \sin z \leq 1$ e nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione coseno é sempre positiva, in quanto $\pi/2 > 1$. La B si annulla per $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$, la C per $x = 0$ e la D per $x = \sqrt{e^{\pi/2} - 1}$.