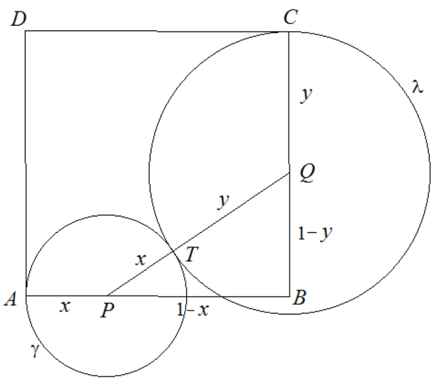
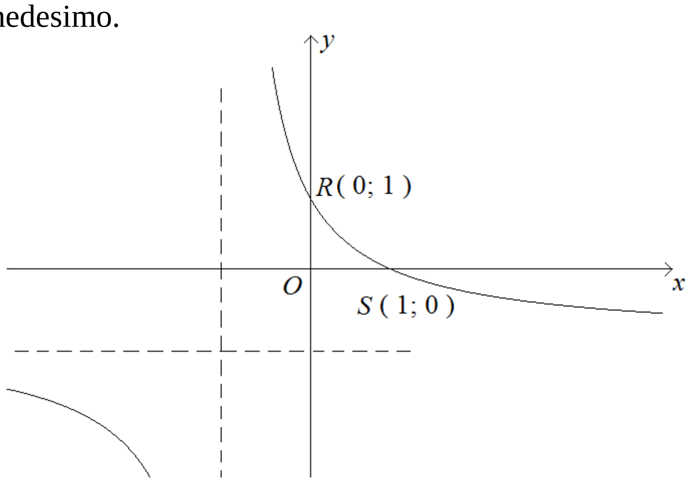
PROBLEMA 1

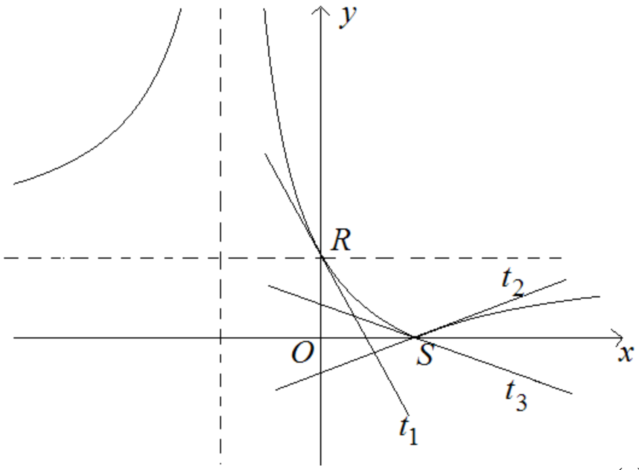
1. Indicato con T il punto di tangenza delle due circonferenze e posto $TQ = QC = y$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC, si ha: $(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$, ovvero $2xy = 1-2x+1-2x$ e, infine, $y = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, con la limitazione $0 \le x \le 1$.



La funzione $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ ottenuta rappresenta un iperbole equilatera con asintoti $x = -1$, $y = -1$ e interseca gli assi coordinati nei punti $R(0;1)$ e $S(1;0)$. La funzione $f(x)$ considerata, prescindendo dalle limitazione geometriche, ha per dominio $D = [\forall x \in R,\ x \neq -1]$. Essa risulta *monotona decrescente* in ciascun arco connesso e i due archi connessi (rami dell'iperbole) giacciono in differenti semipiani rispetto all'asintoto orizzontale, pertanto risulta invertibile in tutto il dominio. La sua inversa è la funzione $x = f(y) = \dfrac{1-y}{1+y}$, ottenuta algebricamente esplicitando la x dalla relazione $y = f(x)$ o, più semplicemente, con considerazioni geometriche, scambiando x con y, in virtù della simmetria del grafico rispetto alla retta $y = x$. Il grafico della funzione inversa è il medesimo.



2. Il grafico della funzione $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$ si ottiene operando una simmetria rispetto all'asse x dei soli punti del grafico precedente, aventi ordinata negativa.



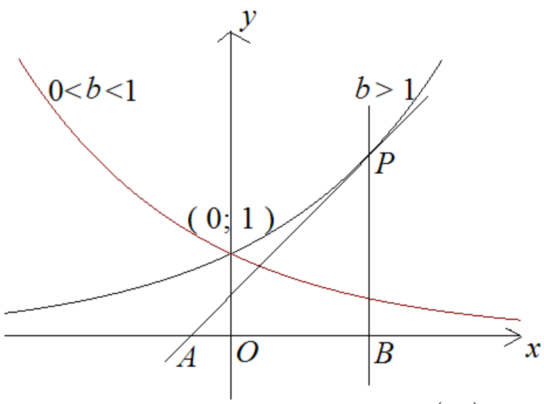
La tangente t_1, in R, ha equazione $y-1=g'(0)(x-0)$ equivalente a $y-1=f'(0)(x-0)$, ovvero $y=-2x+1$.

Per quanto riguarda il punto S, trattandosi di un punto angoloso, non esiste tangente. È possibile però determinare una tangente destra t_2 e una tangente sinistra t_3, simmetriche rispetto all'asse x. La tangente t_3 della $g(x)$ coincide con la tangente in S alla $f(x)$. L'equazione della retta t_3 è $y-0=f'(1)(x-1)$ ovvero $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, mentre la tangente t_2, per simmetria, ha equazione $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

3. L'area richiesta è $A_{ROS}=\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)dx=\left[-x+2\ln|1+x|\right]_0^1=-1+2\ln 2$

PROBLEMA 2

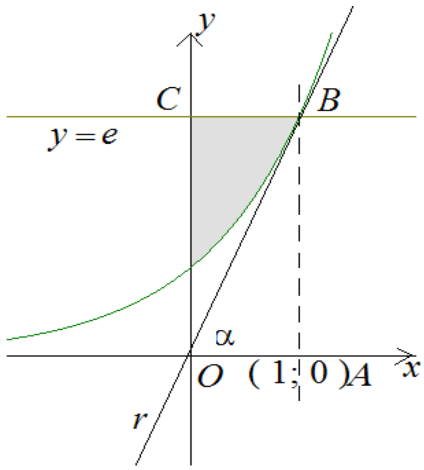
1. Per la funzione esponenziale $f(x)=b^x$ si distinguono i due seguenti casi:
   a) se $0<b<1$, la funzione, definita per ogni x reale, è positiva decrescente, per $x\to+\infty$ tende asintoticamente a zero, per $x\to-\infty$ tende a $+\infty$.
   b) se $b>1$, la funzione, definita per ogni x reale, è positiva crescente, per $x\to-\infty$ tende asintoticamente a zero, per $x\to+\infty$ tende a $+\infty$.



tutte le curve esponenziali, al variare di b, passano per $(0;1)$

2. Poiché $f'(t)=b^t \ln b$, l’equazione della tangente nel generico punto $P(t;b^t)$ è $y-b^t=b^t \ln b(x-t)$. Ponendo in tale equazione y = 0 si ottiene $A\left(t-\frac{1}{\ln b};0\right)$. Essendo $B(t;0)$, si ha: $\overline{AB}=\left|t-\frac{1}{\ln b}-t\right|=\frac{1}{|\ln b|}$. Tale misura è indipendente dalla scelta del punto P e vale 1 quando $b=e$, $b=\frac{1}{e}$.

3. L’ascissa x del punto di tangenza e il coefficiente angolare della retta r, di equazione $y=mx$, si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} mx=e^x \\ m=e^x \end{cases}$ la cui soluzione è $\begin{cases} x=1 \\ m=e \end{cases}$. L’ampiezza angolare richiesta, espressa in radianti, è $\alpha=\arctan e \approx 1{,}2182$



L’area richiesta, evidenziata nella figura precedente, può essere calcolata come differenza tra l’area del rettangolo $OABC$ e l’integrale della funzione definito tra 0 e 1. L’area richiesta vale pertanto

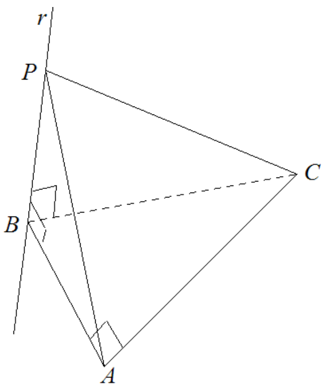
$$1\cdot e-\int_0^1 e^x dx=e-\left[e^x\right]_0^1=1.$$

QUESTIONARIO

1. Dalla regola di derivazione $Dx^n=nx^{n-1}$ segue che la derivata seconda è $D^{(2)}x^n=D(nx^{n-1})=n\cdot(n-1)x^{n-2}$. Iterando il procedimento fino alla derivata n – sima si ottiene $D^{(n)}x^n=n\cdot(n-1)\cdot \quad \cdot 2\cdot 1=n!$. Nella derivata n – sima di un polinomio di grado n i termini di grado inferiore a n danno contributo nullo. Pertanto, dato il polinomio $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, la sua derivata n – sima è data dal prodotto $a_n\cdot n!$ Per una dimostrazione formale della regola $D^{(n)}x^n=n\cdot(n-1)\cdot \quad \cdot 2\cdot 1=n!$ si può applicare il *principio di induzione*.

2. La retta r, in quanto perpendicolare al piano del triangolo ABC, risulta perpendicolare in B ai lati AB e BC. Ne segue che i triangoli PAB e PBC sono rettangoli in B. Poiché la retta r è perpendicolare a BA e la retta AC è perpendicolare ad AB, segue, per il *teorema delle tre*

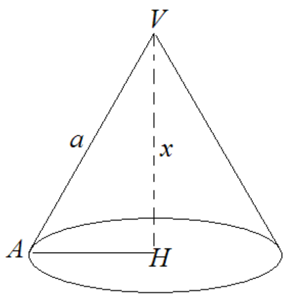
perpendicolari, che la retta AC è perpendicolare al piano BAP e, di conseguenza, il triangolo PAC è rettangolo in A.



3. La richiesta si traduce nella condizione $f'(x)=2$, ovvero $3\cdot e^{3x}=2$, da cui $x=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}$

4. Usando la sostituzione $t=\frac{1}{x}$ il limite proposto assume la forma $4\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=4\cdot 1=4$

5. Posto $VH=x$ risulta $AH^2=a^2-x^2$. Il volume del cono è pertanto $V_{cono}=f(x)=\frac{\pi}{3}(a^2-x^2)\cdot x=\frac{\pi}{3}(a^2x-x^3)$ con $0\le x\le a$ (l'inclusione dei valori limite ha solo senso matematico, ma non ha rilevanza in un problema concreto). Dallo studio del segno di $f'(x)=\frac{\pi}{3}(a^2-3x^2)$ si ottiene $f'(x)>0$ per $0\le x<\frac{\sqrt{3}}{3}a$, pertanto il volume massimo vale $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi a^3$. Per $a=0{,}8\,m$, la capacità del serbatoio, espressa in litri, è $\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi\cdot 0{,}8^3\cdot 1000\approx 206{,}2$.

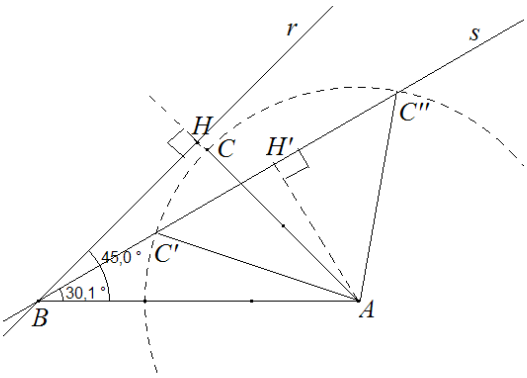


6. Il dominio della funzione, dato dalla condizione $\cos x\ge 0$, è costituito da tutti i valori reali x tali che $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$, con k intero.

7. La condizione di continuità in $x=4$ implica le uguaglianze $\lim_{x\to 4^+}h(x)=\lim_{x\to 4^-}h(x)=h(4)$ che si traducono in $16k-9=0=0$. Il valore richiesto è $k=\frac{9}{16}$

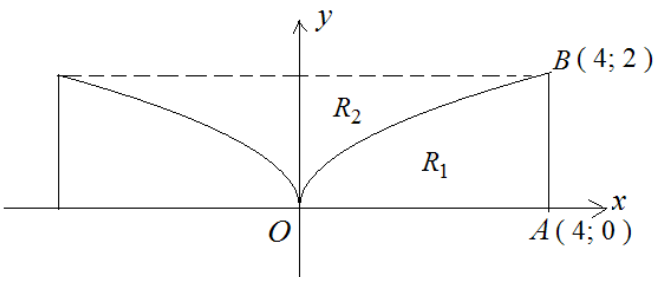
8. Per definizione di progressione aritmetica si ha: $\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}$, ovvero $2\binom{n}{n-2}=\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}$ equivalente all'equazione $2\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}+\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}$ che semplificata dà $n\cdot(n-1)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}+n$. Semplificando per n ($n>3$) si ottiene $n^2-9n+14=0$. Delle due soluzioni $n_1=2$, $n_2=7$ è accettabile solo la seconda.

9. Se l'angolo *ABC* = 45° il triangolo ABC non è costruibile poiché $AC<AH$, in quanto $AC=2$ $AH=\frac{3\sqrt{2}}{2}>2$. Se l'angolo *ABC* = 30° risulta $AH'=1<2=AC$ e si possono costruire due triangoli, *BAC'* e *BAC''*, con le caratteristiche assegnate.



10. Il solido richiesto è ottenuto dalla rotazione attorno all'asse *y* della regione R_1. Il suo volume si può ottenere come differenza tra il volume del cilindro con raggio di base *OA* e altezza *AB* e quello del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse *y* della regione R_2. L'equazione della curva *OB* è $x=f(y)=y^2$. Pertanto risulta

$$Vol=\pi\cdot OA^2\cdot AB-\pi\int_0^2[f(y)]^2dy=32\pi-\pi\int_0^2 y^4dy=\frac{128}{5}\pi$$



Le tracce non presentano difficoltà né di tipo concettuale, né di tipo tecnico. Gli argomenti trattati rientrano nei canoni tradizionali della disciplina. I quesiti sono in generale semplici, ma non banali.

Il livello di difficoltà dei due problemi si equivale, contrariamente a quanto accadeva in tempi non molto lontani.

GIANFRANCO PISTONI - FERRUCCIO ROHR