Soluzioni dei quesiti della maturità scientifica A.S. 2007/2008

Nicola Gigli [*]   Sun-Ra Mosconi [†]

19 giugno 2008

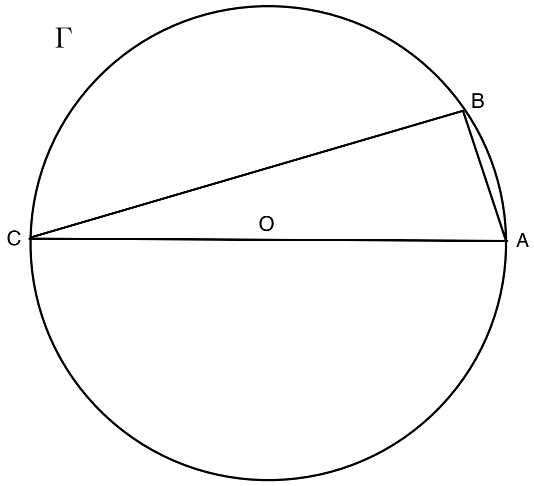
1. La proposizione è falsa. Per trovare un controesempio ad essa, si consideri un qualunque piano π e si trovino due solidi S_1, S_2 di uguale volume di cui S_1 interamente contenuto in uno dei due semispazi delimitati da π e S_2 interamente contenuto nell'altro. Consideriamo ora un qualunque piano π' parallelo a π e supponiamo che $\text{Area}(\pi' \cap S_1) > 0$: pur avendo S_1 ed S_2 uguale volume, per nessuna scelta di π' di questo tipo accade che $\text{Area}(\pi' \cap S_1) = \text{Area}(\pi' \cap S_2)$. Infatti la condizione $\text{Area}(\pi' \cap S_1) > 0$ e il fatto che π' sia parallelo a π, ci dicono che π' è interamente contenuto nello stesso semispazio in cui è S_1 (dei due semispazi delimitati da π), dunque la sua intersezione con S_2 è vuota ed ha area nulla.

   C'è un principio matematico la cui formulazione ricorda quella della proposizione in esame, noto come principio di Cavalieri. Esso dice che se S_1 e S_2 sono due solidi e *se esiste* un fascio di piani paralleli che intercetta sui solidi figure di uguale area, *allora* i due solidi hanno lo stesso volume. Si noti che per questo principio l'implicazione va, in un certo senso, nel verso opposto a quello della proposizione data dal testo del problema: nel principio di Cavalieri si prende come ipotesi l'esistenza del fascio di piani con le opportune proprietà e se ne deduce che i solidi hanno lo stesso volume.

2. Ricordiamo che la sezione aurea φ è data da $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Osserviamo che siccome tutti i lati di un decagono regolare inscritto in una circonferenza individuano angoli al centro uguali, ciascuno di essi

[*] ex perfezionando Scuola Normale Superiore
[†] dottorando università di Catania

individua un angolo al centro di $2\pi/10 = \pi/5$. Sia ora Γ una circonferenza di raggio 1 e centro O, AB uno dei lati di un decagono regolare inscritto in Γ e C il punto diametralmente opposto ad A.



Il triangolo ABC è retto in B, inoltre sappiamo che $B\hat{O}A$ è pari a $\pi/5$, ne segue che l'angolo alla circonferenza $B\hat{C}A$ è pari a $\pi/10$, in quanto insiste sullo stesso arco AB. Il seno di $B\hat{C}A$ è, per definizione, pari al rapporto delle lunghezze di AB e AC. Poiché il testo del problema ci ricorda che la lunghezza di AB è pari a $(\sqrt{5}-1)/2$, otteniamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

3. Sia r il raggio del cerchio di base ed h l'altezza della casseruola. La superficie S è allora determinata da

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h$$

mentre il suo volume da

$$V = \pi r^2 h$$

Esprimendo h in funzione di r ed S si ha

$$h = \frac{S}{2\pi r} - \frac{r}{2}$$

e sostituendo questa espressione nella formula del volume si ottiene

$$V(r) = \frac{r}{2}(S - \pi r^2)$$

L'espressione va considerata solamente per valori positivi di r e di V. La derivata di V è

$$\frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi r^2$$

che risulta positiva per $0 < r < \sqrt{S/3\pi}$ e negativa per $r > \sqrt{S/3\pi}$. Il punto di massimo (globale per $r > 0$) è quindi $r = \sqrt{S/3\pi}$, dove il volume assume il valore

$$V_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{S^3}{3\pi}}$$

4. La regola di de L'Hôpital, in questo caso specifico, dice che date due funzioni $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e differenziabili in $[a, +\infty)$ tali che

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{cases}$$

si ha che vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Applicando questo teorema al nostro caso con $f(x) = x^{2008}$ e $g(x) = 2^x$ si ha che la prima ipotesi è evidentemente soddisfatta. Calcolando le derivate si ha

$$f'(x) = 2008x^{2007}, \qquad g'(x) = \log(2)2^x$$

Per sapere se esiste e quanto vale il limite del rapporto delle derivate si può applicare nuovamente la regola di de L'Hôpital e di nuovo dovremo calcolare le derivate di f' e g':

$$f''(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}, \qquad g''(x) = (\log(2))^2 2^x$$

Iterando questo argomento 2008 volte avremo, indicando con $f^{(2008)}$ e $g^{(2008)}$ le derivate di ordine 2008 di f e g, che

$$f^{(2008)}(x) = 2008 \cdot 2007 \ldots 2 \cdot 1 = 2008!, \qquad g^{(2008)}(x) = (\log(2))^{2008} 2^x$$

Si avrà dunque la catena di uguaglianze

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2008!}{(\log(2))^{2008}2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(2007)}(x)}{g^{(2007)}(x)} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e quindi il limite cercato è nullo.

5. Il generico polinomio di terzo grado è della forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dalle condizioni $P(0) = P'(0) = 0$ si ha subito $d = c = 0$. Da $P(1) = 0$ si ottiene la relazione $a + b = 0$. Calcolando l'intregrale si ha

$$\int_0^1 P(x)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3}$$

e quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

che ha unica soluzione $a = -1$, $b = 1$. Il polinomio cercato è quindi $P(x) = -x^3 + x^2$.

6. Sia k la ragione della supposta progressione geometrica. Allora

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

ed inoltre

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{2} + k$$

da cui, sostituendo il valore trovato per k si ha l'equazione

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n(n-1) - n.$$

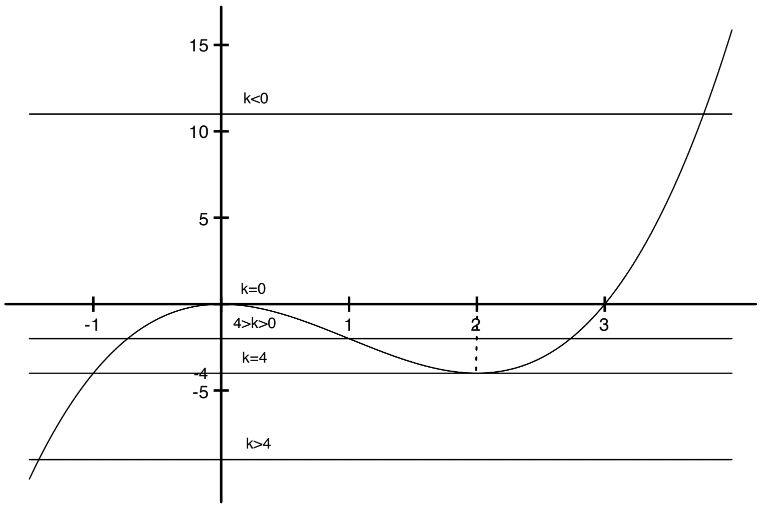
Essendo $n > 3$, l'equazione diventa

$$(n-1)\left(\frac{n-2}{6} - 1\right) = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad (n-2)(n-7) = 0$$

e quindi l'unica valore possibile per n è $n = 7$.

7. Per ogni k, il numero delle soluzioni dell'equazione è il numero di intersezioni fra il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ e la retta di equazione $y = -k$. Studiamo quindi la funzione f. La sua derivata è $3x^2 - 6x$ e risulta positiva per $x < 0$ o $x > 2$, negativa per $0 < x < 2$. I limiti a $\pm\infty$ sono $\pm\infty$ rispettivamente e la funzione si annulla solo in $x = 0$ e $x = 3$. Riassumendo queste informazioni abbiamo quindi che

f ha un massimo locale in 0 (dove vale 0), un minimo locale in 2 (dove vale -4) ed ha grafico tracciato in figura.



Risulta quindi che il numero di soluzioni è

$$\begin{cases} 1 & \text{se } k < 0 \text{ o } k > 4 \\ 2 & \text{se } k = 0 \text{ o } k = 4 \\ 3 & \text{se } 0 < k < 4 \end{cases}$$

A titolo di esempio sono state tracciate le rette per $k = 10, 4, 2, 0, -11$.

8. La funzione $x \mapsto x^\pi$ è definita per tutti e soli gli x maggiori o uguali a 0, mentre la funzione $x \mapsto \pi^x$ è definita per ogni x reale. Ne segue che il dominio di f è la semiretta $[0, +\infty)$. Dal calcolo delle derivate risulta

$$f'(x) = \pi^x \log \pi - \pi x^{\pi-1},$$
$$f''(x) = \pi^x \log^2 \pi - \pi(\pi - 1)x^{\pi-2},$$

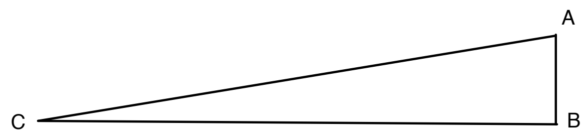
dove $\log \pi$ è il logaritmo naturale di π. Il valore di tali funzioni in π è:

$$f'(\pi) = \pi^\pi \log \pi - \pi^\pi = \pi^\pi(\log \pi - 1),$$
$$f''(x) = \pi^\pi \log^2 \pi - \pi^\pi + \pi^{\pi-1} > \pi^\pi(\log^2 \pi - 1).$$

Poiché $\pi > e$, abbiamo $\log \pi > 1$ e dunque $f'(\pi) > 0$. Analogamente, poiché $\log^2 \pi > 1$, vale anche $f''(\pi) > 0$.

9. Il limite non esiste. Infatti affinché esso esista, devono esistere entrambi i limiti $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ ed essi devono essere uguali. Per $x < 1$ abbiamo $f(x) = -(1+x)$ e dunque vale $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$. Se invece $x > 1$, abbiamo $f(x) = 1 + x$ e dunque $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$. Ergo entrambi i limiti esistono ma non sono uguali: in particolare il limite per x che tende ad 1 non esiste, e siamo in presenza di una discontinuità a salto.

10. Il tratto in esame è rappresentato dalla figura qui sotto (non in scala), dove il triangolo ABC è rettangolo in B.



Per ipotesi abbiamo $\overline{AB} = 0,085Km$ (il dislivello) e $\overline{AC} = 1,2Km$ (la lunghezza del percorso), dunque la misura in radianti $(B\hat{C}A)_{rad}$ dell'angolo $B\hat{C}A$ è data da

$$(B\hat{C}A)_{rad} = \arcsin\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right) \simeq 0,071.$$

La misura in gradi sessagesimali $(B\hat{C}A)_{grad}$ dello stesso angolo è data da

$$(B\hat{C}A)_{grad} = \frac{180}{\pi}(B\hat{C}A)_{rad} \simeq 4,06.$$

La percentuale da indicare nel segnale, è pari alla tangente dell'angolo $B\hat{C}A$, ed è dunque data da:

$$\tan(B\hat{C}A) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{0,085}{\sqrt{(1,2)^2 - (0,085)^2}} \simeq 0,071.$$