

Soluzione del tema d'esame di matematica, A.S. 2005/2006

Niccolò Desenzani * Sun-ra J.N. Mosconi †

22 giugno 2006

Problema 1

1. Indicando con A e B i lati del rettangolo, il perimetro è $2A + 2B = \lambda$ mentre l'area è $\mathcal{A} = AB$. Dalla prima deduciamo $B = \lambda/2 - A$ e inserendo nella seconda $\mathcal{A} = A(\lambda/2 - A)$ che è una parabola con la concavità rivolta verso il basso nella variabile indipendente A . Avendo soluzioni $A = 0$ e $A = \lambda/2$, assume massimo nel punto intermedio $A_{max} = \lambda/4$ e quindi $B = A = \lambda/4$ e l'aiuola di area massima è un quadrato di superficie $\lambda^2/16$.
2. Detti P_Q e P_C i perimetri del quadrato di lato l e del cerchio di raggio r rispettivamente, si ha $P_Q = 4l$ mentre $P_C = 2\pi r$. Le aree rispettive sono quindi $\mathcal{A}_Q = P_Q^2/16$ e $\mathcal{A}_C = P_C^2/4\pi$. Essendo $P_Q + P_C = \lambda$ possiamo esprimere la somma delle aree in funzione di P_Q come

$$\mathcal{A}_{tot} = \frac{4 + \pi}{16\pi} P_Q^2 - \frac{\lambda}{2\pi} P_Q + \frac{\lambda^2}{4}$$

che è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice in corrispondenza di $P_Q = \frac{4\lambda}{4+\pi}$ che fornisce il minimo dell'area con l'aiuola quadrata di lato $\frac{\lambda}{4+\pi}$ e l'aiuola circolare di raggio $\frac{\lambda}{8+2\pi}$.

3. Il massimo si ottiene quando tutto il filo viene utilizzato per delimitare l'aiuola circolare, di raggio $\lambda/2\pi$.

Ogni lato della nuova scatola è $11/10$ del lato iniziale, dunque il volume della scatola ingrandita è $\left(\frac{11}{10}\right)^3$ dell' iniziale, determinandone così un incremento del $33,1\%$.

*Elicit

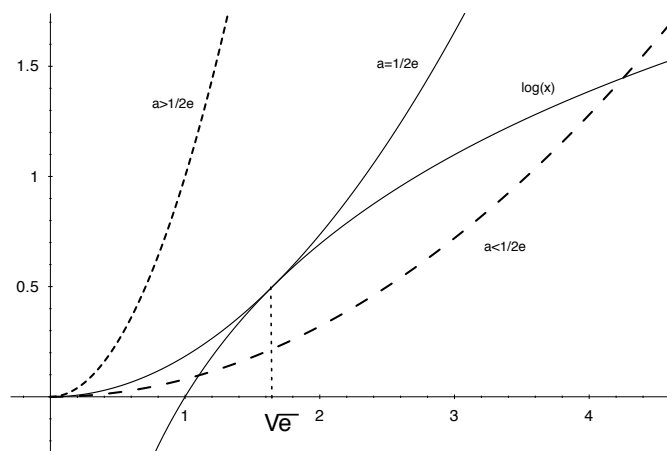
†Politecnico di Milano

Problema 2

1. Per $a \leq 0$ f è crescente e g è non crescente sul dominio di definizione di f . Poichè in $x = 1$ $f(1) = 0$ e $g(1) \leq 0$ per il teorema degli zeri si ha un'unica soluzione. Per $a > 0$ la condizione di tangenza implica l'uguaglianza delle derivate, ossia

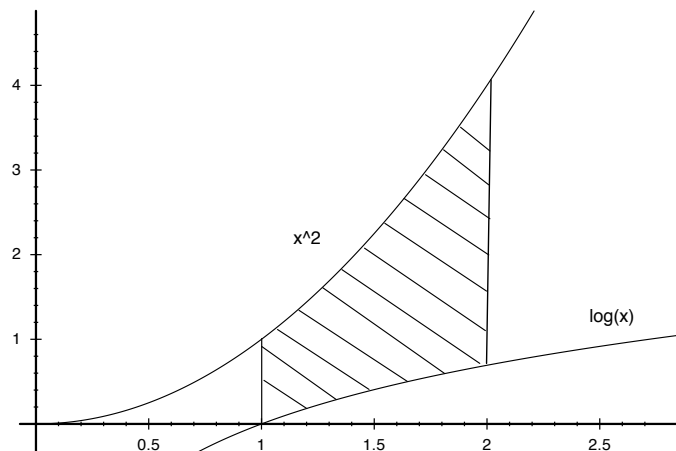
$$f'(x) = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 2ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

(nel dominio $\{x > 0\}$ del logaritmo). Sostituendo il valore trovato nell'equazione $f(x) = g(x)$ si ottiene $a = 1/2e$. Per questo valore di a si ha quindi tangenza delle funzioni nel punto di ascissa $\sqrt{e}$. Essendo g crescente in a , se $a > 1/2e$ non si hanno soluzioni. Se invece $0 < a < 1/2e$ si hanno esattamente due soluzioni, dal momento che $f - g$ è una funzione concava, quindi ha al massimo due intersezioni con l'asse x .

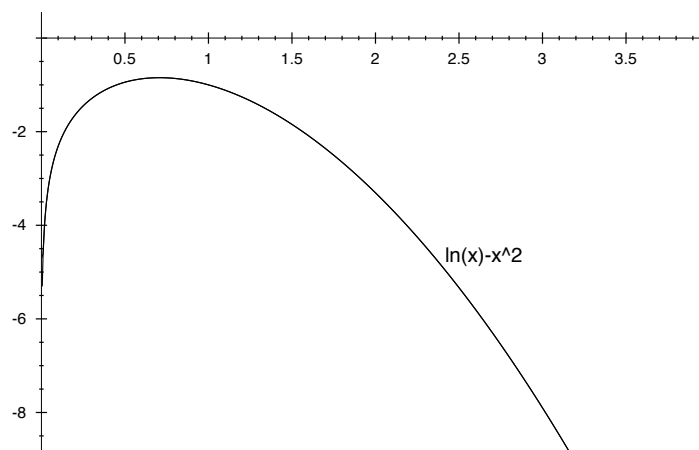


2. Essendo $a = 1 > 1/2e$ si ha $g > f$ per ogni $x > 0$, quindi l'area indicata (tratteggiata in figura) si ottiene integrando $g - f$ fra 1 e 2, ottenendo

$$Area = \int_1^2 (x^2 - \log x) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x \log x + x \right|_1^2 = \frac{10}{3} - 2 \log 2$$



3. Il dominio di $\log x - ax^2$ è $\{x > 0\}$, e si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ (osservando che $a > 0$). Il segno è sempre negativo, essendo $a > 1/2e$ e la derivata è positiva in $(0, 1/\sqrt{2a})$, negativa in $(1/\sqrt{2a}, +\infty)$ e nulla in $1/\sqrt{2a}$, dove quindi la funzione ha massimo assoluto. Non vi sono asintoti obliqui né orizzontali dal momento che $h'(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Infine la funzione è concava in quanto somma di funzioni concave. In figura è rappresentato il grafico nel caso $a = 1$.



Questionario

1. Il numero totale di chicchi si ottiene come somma della serie geometrica

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n = 2^{64} - 1$$

da cui deduciamo il peso totale in tonnellate P_{ton} come

$$P_{ton} = \frac{1}{10^6} P_g = 10^{-6} \left(38 \frac{2^{64} - 1}{10^3} \right) \simeq 38 \frac{2^{64}}{10^9} \simeq 700976471852,37$$

(dove P_g è il peso in grammi) ossia circa 701 miliardi di tonnellate!

2. Si osserva innanzi tutto che la somma degli angoli delle facce che si incontrano in un vertice di un poliedro deve essere strettamente minore di 360° . Inoltre per formare un vertice sono necessarie almeno tre facce. Nel caso le facce siano triangolari, gli angoli saranno di 60° , quindi abbiamo tre possibilità:

- (a) 3 facce: la somma degli angoli è 180° , e si ottiene il tetraedro.
- (b) 4 facce: la somma degli angoli è 240° , e si ottiene l'ottaedro.
- (c) 5 facce: la somma degli angoli è 300° , e si ottiene l'icosaedro.

Nel caso di facce quadrate gli angoli saranno di 90° quindi le facce incidenti in un vertice non possono essere più di 3 (con somma 270°), generando il cubo. Per facce pentagonali, la somma degli angoli può essere al massimo $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ corrispondente al caso del dodecaedro. Se il numero di lati delle facce è maggiore o uguale a 6 l'angolo al vertice del poligono è maggiore o uguale 120° e quindi la somma di almeno tre di questi angoli è maggiore o uguale a 360° .

3. Siano a e b i lati dell'area di stampa. L'area del foglio (in centimetri quadrati) sarà pari a $(a + 8)(b + 4)$. Essendo $ab = 50$ si ha $b = 50/a$ e quindi l'area del foglio sarà $(a + 8)(50/a + 4)$. Studiando la funzione della variabile indipendente a così ottenuta, si osserva che essa assume minimo (in $\{a > 0\}$) per $a = 10$, da cui $b = 5$. Si ottiene quindi che il foglio di area massima ha misure 18×9 .
4. Essendo la diagonale di un cubo $\sqrt{3}$ volte il lato e osservando che la diagonale del cubo inscritto è un diametro della sfera si ha che il lato del cubo è $1/\sqrt{3}$ metri e il volume $1/3\sqrt{3}$ metri cubi, pari a circa 192,45 litri.

5. Posto

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \cdots + c_n b^n$$

per calcolare la somma dei coefficienti $c_1, \dots, c_n$ è sufficiente porre $a = b = 1$, ottenendo

$$2^n = (1+1)^n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n.$$

6. Poniamo innanzitutto $y = 2x$, con $30^\circ < y < 90^\circ$. Osservando che $k = 0$ non può mai dare soluzione, dobbiamo determinare per quali valori di k l'equazione

$$\cos y = \frac{5k-2}{k}$$

ha soluzione per $30^\circ < y < 90^\circ$. In questo dato intervallo la funzione coseno assume tutti e soli i valori strettamente compresi fra $0 = \cos 90^\circ$ e $\sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ$. Risolvendo il conseguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

si ottiene $\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$.

7. La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di lagrange perché è continua e derivabile in tutto $[0, 1]$. Osserviamo preliminarmente che il punto ξ citato nel teorema deve essere interno all'intervallo. Ponendo $a = 0$ $b = 1$ e risolvendo in ξ nella formula data si ottiene l'equazione

$$-1 = 3\xi^2 - 4\xi$$

che fornisce le soluzioni $\xi = 1/3$ e $\xi = 1$, di cui la seconda va esclusa in quanto estremo dell'intervallo.

8. In effetti $\tan(\pi/4) = 1$ mentre $\tan(3\pi/4) = -1$. La funzione $\tan x$ è strettamente crescente dove definita, in quanto la sua derivata è pari a $1 + \tan^2 x$, quindi sempre positiva. Tuttavia la funzione non è definita in $x = \pi/2 \in [\pi/4, 3\pi/4]$ ed in particolare $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = +\infty$ (da cui $\tan x > 1$ per $\pi/4 \leq x < \pi/2$) e $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = -\infty$ (da cui $\tan x < -1$ per $\pi/2 < x \leq 3\pi/4$). Ciò non contraddice il teorema degli zeri perché la funzione non è continua nell'intervallo indicato.

9. Essendo $f(x) \neq 0$ per ogni x , possiamo dedurre che

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \log(f(x)) = 1$$

e integrando ambo i membri e applicando il teorema fondamentale del calcolo e il fatto che $f(0) = 1$

$$\int_0^x \frac{d}{dt} \log(f(t)) dt = \int_0^x 1 dt \quad \Leftrightarrow \quad \log(f(x)) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^x$$

10. Poiché in $4\pi/3$ si ha un estremo, la derivata di f si deve annullare in $4\pi/3$. Mettendo a sistema con la condizione $f(2\pi/3) = 1$ si ottiene perciò

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} = 1 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $a = \sqrt{3}$, $b = 1$. La funzione risulta quindi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ che si può riscrivere come $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$, di periodo 2π .