PROBLEMA 1

1) Il volume del solido di rotazione è dato da:

$$V_1 = \pi \int_0^6 R^2(y)dy = \pi \int_0^6 \left(\sqrt{6-y}\right)^2 dy = 18\pi.$$

2) Ricavando i raggi di rotazione interno ed esterno, si ha $R_{int}(x) = 6-(6-x^2) = x^2$ e $R_{est} = 6$ e dunque il volume del solido di rotazione è dato da:

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[R_{est}^2(x) - R_{int}^2(x)\right] dx = \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[6^2 - x^4\right] dx \\ &= \pi \left(36\sqrt{6} - \frac{(\sqrt{6})^5}{5}\right) = \frac{144\sqrt{6}}{5}\pi. \end{aligned}$$

3) Chiamando $R(k)$, per $0 \le k \le 6$, l'area della porzione di R sopra alla retta $y = k$, si ha

$$\begin{aligned} R(k) &= \int_0^{\sqrt{6-k}} (6-x^2-k)dx = (6-k)\sqrt{6-k} - \frac{1}{3}(6-k)\sqrt{6-k} \\ &= \frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k}. \end{aligned}$$

Quindi, osservando che l'area di R è proprio $R(0)$, vogliamo risolvere l'equazione $R(k) = R(0)/2$ ossia

$$R(k) = \frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k} = 2\sqrt{6} = \frac{R(0)}{2} \quad \longrightarrow \quad 6-k = (3\sqrt{6})^{\frac{2}{3}}$$

da cui si deriva con semplici calcoli $k = 3(2-\sqrt[3]{2})$.

4) Ricordiamo che la retta tangente al grafico di una funzione f nel punto $(t, f(t))$ è data da $y = f(t) + f'(t)(x-t)$. Quindi per $f(x) = 6-x^2$ otteniamo che la retta tangente a λ nel suo punto di ascissa t ha equazione

$$y = 6 - t^2 - 2t(x-t),$$

e determina quindi un triangolo di vertici dati dall'intersezione con gli assi coordinati e dall'origine: l'intersezione con l'asse delle ascisse si trova ponendo $y = 0$ e risolvendo in x per ottenere $x(t) = (6+t^2)/2t$; l'intersezione con l'asse delle ordinate si trova ponendo $x = 0$ per ottenere $y(t) = 6 + t^2$. $A(1)$ risulta quindi essere

$$A(1) = \frac{x(1)y(1)}{2} = \frac{7 \cdot 7}{4} = \frac{49}{4}$$

5) Dal punto precedente si ricava l'espressione per $A(t)$:

$$A(t) = \frac{x(t)y(t)}{2} = \frac{(6+t^2)^2}{2t}.$$

Per trovare il punto di minimo basta porre $A'(t) = 0$ ottenendo

$$\frac{4t^2(6+t^2) - (6+t^2)^2}{2t} = 0 \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 6 = 0$$

che fornisce l'unica soluzione positiva $t = \sqrt{2}$, che risulta essere punto di minimo per considerazioni sul segno della derivata.