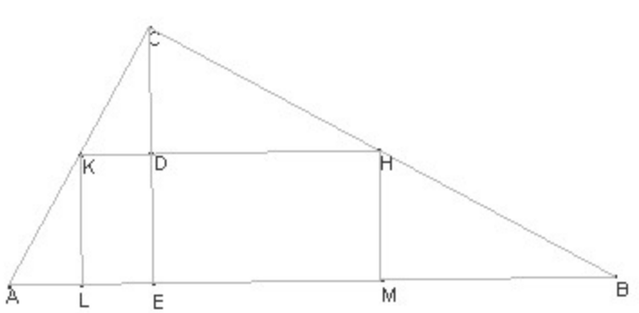
PROBLEMA 1.

a) Poiché il triangolo ABC è metà di un triangolo equilatero di lato a, i lati del triangolo misurano $\overline{AC}=\frac{a}{2}$ e $\overline{BC}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile sono $\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\sqrt{3}$, che corrispondono ai casi in cui, rispettivamente, il punto R o il punto Q coincidono con C.

b) L'area del quadrilatero mistilineo richiesta si può calcolare sottraendo dall'area del triangolo ABC l'area dei settori circolari APR e BQP. Si ottiene $S(x)=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}-\frac{1}{6}\pi\overline{AP}^2-\frac{1}{12}\pi\overline{PB}^2=\frac{a^2}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}(a-x)^2-\frac{\pi}{12}x^2$, la cui derivata prima è $S'(x)=\frac{\pi}{3}(a-x)-\frac{\pi}{6}x=\frac{\pi}{3}a-\frac{\pi}{2}x$. Dallo studio del segno di $S'(x)$, risulta che il valore massimo di tale area si ha per $x=\frac{2}{3}a$ e vale $S\left(\frac{2}{3}a\right)=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{18}\right)$, mentre il valore minimo si ottiene per $x=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ e vale $S\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\pi\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{17}{48}\pi\right)$.

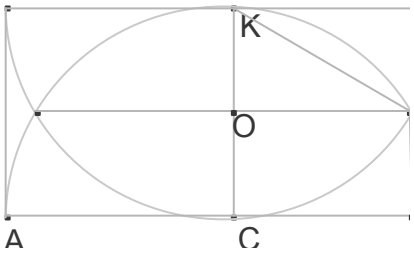
c) Chiamando $\overline{LM}=x$, cioè la misura del lato del rettangolo inscritto che si trova su AB, con $0<x<a$, per similitudine tra i triangoli ABC, AEC e KHC si ha $\overline{CE}=\frac{a}{4}\sqrt{3}$, $\overline{CK}=\frac{x}{2}$, $\overline{CD}=\frac{x}{4}\sqrt{3}$, quindi $\overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}=\frac{a}{4}\sqrt{3}-\frac{x}{4}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)$. L'area del rettangolo è $R(x)=\overline{LM}\cdot\overline{DE}=x\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(ax-x^2)$, con derivata $R'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-2x)$. L'area è massima se $x=\frac{a}{2}$ e in tal caso vale $R\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$.



d) W è costituito da due piramidi non rette che hanno come base il quadrato di lato CE e altezze AE ed EB, quindi $V_W=\frac{1}{3}\overline{CE}^2\cdot\overline{AE}+\frac{1}{3}\overline{CE}^2\cdot\overline{EB}=\frac{1}{3}\overline{CE}^2\cdot\left(\overline{AE}+\overline{EB}\right)=\frac{1}{3}\overline{CE}^2\cdot\overline{AB}=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2\cdot a=\frac{a^3}{16}$.

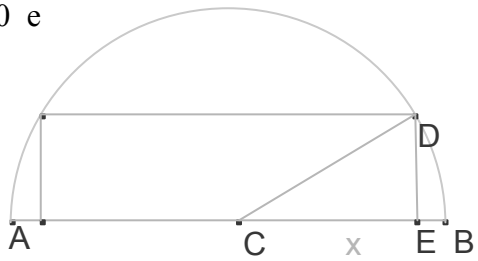
PROBLEMA 2.

a) Per la simmetria della figura, il punto Q di intersezione fra Γ e Γ_1 si trova ad una distanza dal diametro AB pari alla metà del raggio. Chiamando R la sua proiezione ortogonale sul diametro AB, e O quella sul raggio CK perpendicolare ad AB, si ha $\overline{RQ}=\frac{1}{2}=\overline{OC}$, $R\hat{C}Q=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}=30°$ e $\overline{CR}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{OQ}$. Calcolando le aree si trova $A_{OCQ}=\frac{1}{2}\overline{OQ}\cdot\overline{OC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}=A_{KOQ}$, $A_{KCQ}=\frac{\pi}{6}$ (in quanto settore circolare con angolo al centro di 60°, appartenente ad un cerchio di raggio 1). Quindi l'area del triangolo mistilineo OQC si ricava per differenza ed è data da $A_{OQC}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$ e l'area richiesta è $A_{richiesta}=4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.



b) Indicando con D il vertice del rettangolo appartenente all'arco BK, e con E la sua proiezione sul diametro AB, e ponendo $\overline{CE}=x$, con $0<x<1$, si ha $\overline{DE}=\sqrt{1-x^2}$. L'area del rettangolo è data da $S(x)=2\cdot\overline{CE}\cdot\overline{DE}=2x\sqrt{1-x^2}$.

Conviene massimizzare la funzione $g(x)=S^2(x)=4x^2-4x^4=4\left(x^2-x^4\right)$ la cui derivata prima $g'(x)=4\left(2x-4x^3\right)=8x\left(1-2x^2\right)$ si annulla per $x=0$ e $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dallo studio del segno di $g'(x)$ e tenendo conto delle limitazioni per x, si ha il massimo per $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ con area 1.



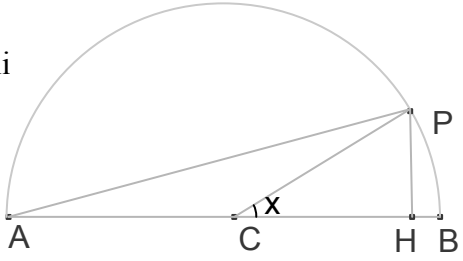
c) Per motivi geometrici, $0<x<\frac{\pi}{2}\vee\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

Nel caso $0<x<\frac{\pi}{2}$, per i teoremi sui triangoli rettangoli, $\overline{PH}=\overline{PC}\sin x=\sin x$,

$\overline{CH}=\overline{PC}\cos x=\cos x$,

$\overline{AH}=1+\cos x$,

quindi $S_1(x)=\frac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}(1+\cos x)\sin x$ e $S_2(x)=\frac{1}{2}\overline{CH}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cos x\sin x$,



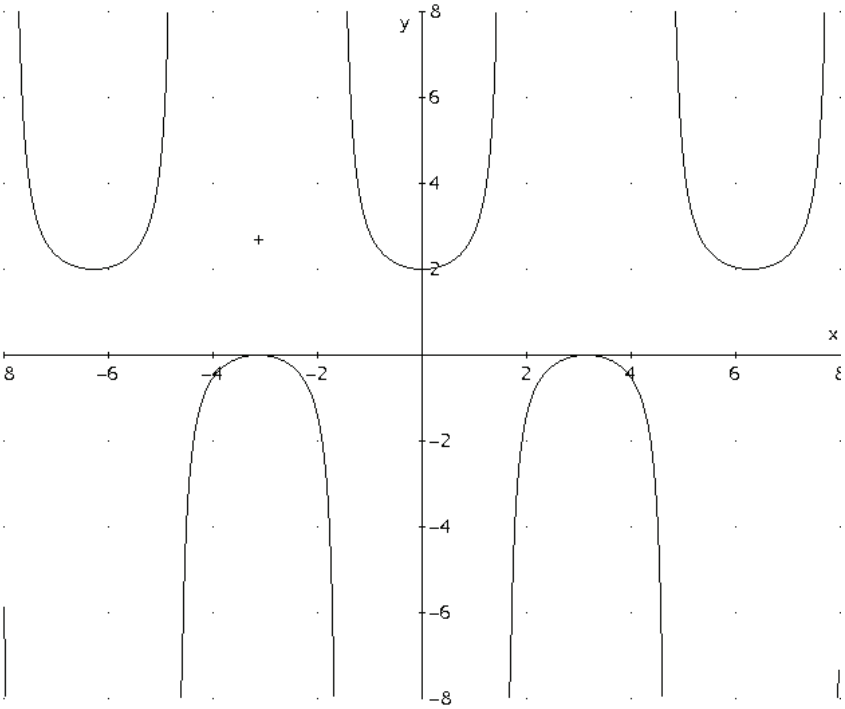
pertanto $f(x)=\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}=\dfrac{(1+\cos x)\sin x}{\cos x\sin x}=\dfrac{1+\cos x}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos x}+1$.

Nel caso invece $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ si ottiene $f(x)=-\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$

d) Prescindendo dai limiti geometrici del problema, come il testo richiede, consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$. Essa è periodica di periodo 2π, definita se $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Restringendo l'analisi all'intervallo $[0;2\pi]$, osserviamo che $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x)=\mp\infty$ (quindi f ammette infiniti asintoti verticali di equazione $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$).

Conoscendo il grafico della funzione $y=\cos x$, possiamo affermare che la funzione f è positiva e crescente in $]0;\dfrac{\pi}{2}[$, negativa e crescente in $]\dfrac{\pi}{2};\pi[$, negativa e decrescente in $]\pi;\dfrac{3}{2}\pi[$, positiva e decrescente in $]\dfrac{3}{2}\pi;2\pi[$ e ammette minimi in $(0;2)$ e $(2\pi;2)$ e massimo in $(\pi;0)$. Segue la rappresentazione grafica.

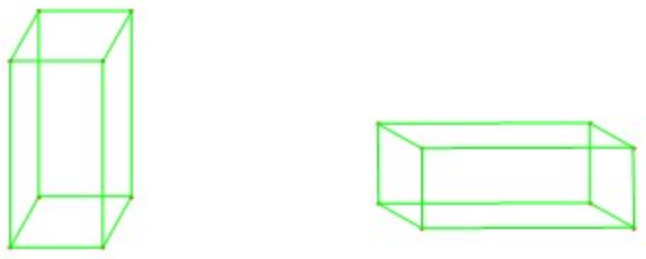
Si precisa che $f(x)=\sec x+1$.



Con ragionamento analogo al precedente si può ottenere il grafico della funzione nel secondo caso.

QUESTIONARIO

1. La proposizione è falsa: come controesempio basta considerare lo stesso parallelepido appoggiato su due basi diverse, come si può veder in figura.



Vale invece l'implicazione inversa (principio di Cavalieri).

2. Detto r il raggio del cerchio, applicando il teorema della corda si può ricavare il lato del decagono inscritto $l = 2r\sin\frac{\pi}{10}$ [1]. La sezione aurea di un segmento è il segmento medio proporzionale tra il segmento stesso e la parte rimanente quindi dalla proporzione $r : l = l : (r - l)$ si ottiene $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$. Sostituendo nella [1] si ottiene la tesi.

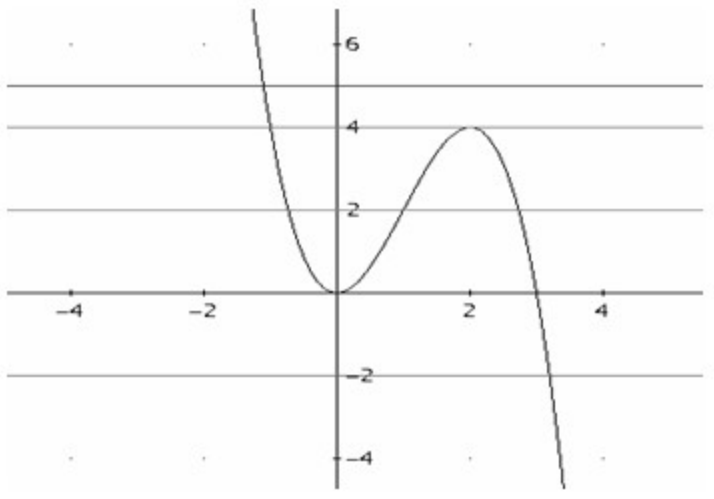
3. Indicato con x e h rispettivamente il raggio di base e l'altezza del cilindro ($x,h>0$) l'area S può essere scritta $S = A_{laterale} + A_{base} = 2\pi xh + \pi x^2$ da cui $h = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x}$. Il volume richiesto è quindi $V(x) = \pi x^2 \frac{S - \pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2}(Sx - \pi x^3)$ la cui derivata prima risulta $V'(x) = \frac{1}{2}(S - 3\pi x^2)$. Dallo studio del segno di $V'(x)$ si ottiene che la casseruola ha volume massimo quando $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = h$ e quindi quando la sua altezza è uguale al raggio di base.

4. Si rimanda al manuale per la regola di *de L'Hôpital*. Per la dimostrazione del risultato richiesto si può notare che applicando successivamente la regola 2008 volte si ottiene: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2008!}{2^x \cdot (\ln 2)^{2008}} = 0$

5. Se $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a,b,c,d \in R$, risulta $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ed imponendo $P(0) = d = 0$, $P'(0) = c = 0$, $P(1) = a + b = 0$, si ottiene $P(x) = ax^3 - ax^2$. Considerando $\int_0^1 (ax^3 - ax^2)\,dx = a\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}a = \frac{1}{12}$ si ottiene infine $a=-1$ da cui $P(x) = -x^3 + x^2$

6. Una progressione si definisce aritmetica se la differenza tra un termine ed il precedente è costante, pertanto si ha che $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$, con $n > 3$. Sviluppando mediante i coefficienti binomiali si giunge a $\frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!}$ che diventa $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}$. Svolgendo i calcoli e semplificando per $n(n-2)$ (possibile, per le condizioni del testo) si ottiene la soluzione $n = 7$.

7. L'equazione $k = 3x^2 - x^3$ può essere risolta graficamente rappresentando la cubica di equazione $y_1 = 3x^2 - x^3$ (che presenta massimo in $(2,4)$ e minimo in $(2,0)$) e il fascio di rette orizzontali di equazione $y_2 = k$.
Osservando il grafico in figura risulta che per $k < 0 \vee k > 4$ l'equazione data ha una soluzione, se $k = 0 \vee k = 4$ l'equazione data ha tre soluzioni (di cui due coincidenti), se $0 < k < 4$ l'equazione ha tre soluzioni distinte.



8. Il dominio della funzione f è $]0;+\infty[$; le derivate prima e seconda sono rispettivamente
$f'(x) = \pi^x \ln\pi - \pi \cdot x^{\pi-1}$
$f''(x) = \pi^x \ln^2\pi - \pi(\pi-1) \cdot x^{\pi-2}$
Poiché $\pi > e$ si ha $\ln\pi > 1$ pertanto nel punto $x = \pi$ le due derivate valgono rispettivamente $f'(\pi) = \pi^\pi(\ln\pi - 1) > 0$ e $f''(\pi) = \pi^\pi\left(\ln^2\pi + \frac{1}{\pi} - 1\right) > 0$.

9. Poiché $\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}(x+1) = 2 \neq \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{1-x} = \lim_{x\to1^+}(-x-1) = -2$, il limite non esiste, ma esistono i due limiti destro e sinistro e sono diversi.

10. L'inclinazione della strada si può determinare mediante il teorema dei triangoli rettangoli: detto α l'angolo alla base del triangolo rettangolo che ha come ipotenusa il percorso di 1,2 km e come altezza il dislivello di 85 m, si ha $sen\alpha = \frac{85m}{1200m}$, quindi $\alpha = 4°\ 3'\ 43''$. La pendenza si calcola facendo il rapporto tra altezza e base del suddetto triangolo ed è pertanto pari a $\frac{85\text{ m}}{85\text{ m} \cdot \cot\alpha} = \tan\alpha \approx 0,07$.
Allo stesso risultato si può giungere applicando il teorema di Pitagora per determinare la lunghezza della base del triangolo.
La percentuale da riportare sul segnale è quindi del 7%.

Soluzione a cura di: **Alessandra Biglio**, Liceo Classico "*Vittorio Alfieri*" di Torino,
Giuliana Brun, Liceo Scientifico "*Isaac Newton*" di Chivasso,
Antonella Cuppari, Liceo Scientifico "*Piero Gobetti*" di Torino,
Giovanna Rovero, già docente di Liceo Scientifico