QUESTIONARIO

1) Detto OAB il triangolo isoscele avente lati OA e OB unitari e lato AB coincidente con quello del decagono, si tracci la bisettrice BH all'angolo OBA. Essendo l'angolo $AOB = \pi/5$ si ha che

$$\frac{\pi}{5} + OAB + OBA = \pi \quad \rightarrow \quad OAB = \frac{2}{5}\pi \quad \rightarrow \quad ABH = \frac{\pi}{5}.$$

Quindi i due triangoli ABH e OAB avendo due angoli uguali ($ABH = BOA$ e OAB è in comune) sono simili. Dette quindi x e y le lunghezze di AB e HA rispettivamente, si ha la proporzione

$$x : y = 1 : x \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

che è il rapporto aureo. La metà del lato del decagono è quindi il seno di $\pi/10 = 18°$, mentre il $\sin(36°)$ si può calcolare mediante le forme di duplicazione ottenendo

$$\sin(36°) = 2\frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

2) Per poter utilizzare la quantità minima di materiale per costruire la lattina è necessario minimizzare la superficie del cilindro. Osserviamo che l'area S della superficie e il volume V sono date, per il cilindro, da

$$S = 2\pi R(R+h) \quad \text{e} \quad V = \pi R^2 h$$

dove R è il raggio della base e h l'altezza del cilindro. Poichè il volume è assegnato e pari a $0.4l = 0.4dm^3$, deduciamo l'espressione dell'altezza h in funzione del raggio R come $h = (0.4dm^3)/(\pi R^2)$ e di conseguenza l'espressione dell'area in funzione di R:

$$S = S(R) = 2\pi R(R + \frac{0.4dm^3}{\pi R}) = 2\pi R^2 + 2(0.4dm^3)\frac{1}{R}$$

Derivando rispetto a R e annullando la derivata otteniamo per R e poi per h le espressioni

$$\begin{aligned} R &= \sqrt[3]{\frac{0.2dm^3}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{0.2}{\pi}}dm = 10\sqrt[3]{\frac{0.2}{\pi}}cm \\ h &= \frac{0.4}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{0.04}}dm = 10\sqrt[3]{\frac{1.6}{\pi}}cm \end{aligned}$$

3) Detta $f(x) = x\sin x$ la retta tangente al grafico di f in un punto x_0 è

$$y = x_0 \sin x_0 + (\sin x_0 + x_0 \cos x_0)(x - x_0)$$

che per $\sin x_0 = 1$ (e quindi $\cos x_0 = 0$) fornisce $y = x$ mentre per $\sin x_0 = -1$ (e quindi $\cos x_0 = 0$) fornisce $y = -x$.

4) Detti a e b i lati del rettangolo, $P = 2a + 2b$ il suo perimetro e $A = ab$ la sua area abbiamo che

$$A = a(\frac{P}{2} - a) = \frac{aP}{2} - a^2.$$

Quindi se $P \geq 0$ è fissato, l'area è una funzione del solo lato a, dove $0 < a < P$. Trovando il massimo di questa parabola nell'intervallo $(0, P)$ si ha che esso viene assunto nel punto $a = P/4$. Dunque, essendo $P = 2a + 2b$ si ha che anche $b = P/4$ e quindi il rettangolo è un quadrato.

5) Il numero e è definito come

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Il limite del rapporto incrementale della funzione e^x si calcola sfruttando la proprietà $e^{x+y} = e^x e^y$ della funzione esponenziale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x,$$

dove si è sfruttato il limite notevole (deducibile direttamente dalla definizione di e) $(e^h - 1)/h \to 1$ per $h \to 0$.

6) Per ogni numero naturale n il numero $n!$ è il prodotto dei primi n numeri positivi. Esso rappresenta il numero di permutazioni di n oggetti ed è legato ai coefficienti binomiali dalla formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Questa formula si ottiene ricordando che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di sottinsiemi si k elementi in un insieme di n elementi. Per calcolare questo numero si sceglie il primo elemento fra tutti gli n possibili, il secondo fra i rimanenti $n-1$, il terzo fra i rimanenti $n-2$ e così via fino a scegliere il k-esimo elemento fra i restanti $n-k+1$. Effettuata questa scelta bisogna osservare che si otterrebbe lo stesso insieme per una qualsiasi permutazione delle k scelte fatte. Quindi occorre dividere il numero ottenuto per il numero di permutazioni, $k!$, di k scelte

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

7) Raccogliendo x^2 e osservando che $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ si ottiene

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = x^2(x-2)^2 + 3 \geq 3 > 2.$$

Quindi non esiste alcun valore di k che soddisfi $f(k) = 2$.

8) L'ottaedro è regolare perchè ha tutti gli spigoli uguali. Esso è formato da due piramidi rette a base quadrata il cui lato è $\sqrt{2}/2$ volte il lato l del cubo e la cui altezza è la metà di l. Ricordando che il volume di una piramide è pari a un terzo del prodotto fra l'area di base e l'altezza, otteniamo che il volume dell'ottaedro è $l^3/6$ e quindi pari a un sesto del volume.

9) Osservando che $55° = 90° - 35°$ si ha che $\sin^2(55°) = \cos^2(35°)$ e quindi, per la relazione fondamentale della trigonometria $\sin^2(55°) + \sin^2(35°) = 1$.

10) Derivando si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f è costante a tratti nel suo dominio di definizione $\{x \neq -1\}$ e i due valori assunti nelle due semirette si ottengono ad esempio prendendo i limiti per $x \to \pm\infty$ che danno rispettivamente i valori $(\pi/2)-\text{artg}1 = \pi/4$ e $(-\pi/2)-\text{artg}1 = -3\pi/4$.