PROBLEMA 2

1) Per la continuità è sufficiente studiare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x^2 + 1 - x^2 \log x = 1 - 0 = 1.$$

Per la differenziabilità studiamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x - x\log x = 0,$$

quindi f risulta continua e derivabile in $x = 0$.

2) Osserviamo innanzi tutto che $f(x)$ tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi, per il Teorema del Valore Intermedio, essendo f continua e assumendo valori sia positivi ($f(0) = 1$) che negativi ($f(e^2) < 0$), l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione. Calcolando la derivata si ha

$$f'(x) = 2x(1 - \log x)$$

e quindi la funzione ha un punto a tangente orizzontale in $x = 0$, che risulta di minimo locale. Essa è crescente per $0 \le x \le e$, assume un massimo positivo in $x = e$ e risulta decrescente per $x \ge e$. Pertanto l'equazione $f(x) = 0$ ha una e una sola soluzione.

3) Dal calcolo della derivata seconda: $f''(x) = -2\log x$ si ricava che la funzione è convessa per $0 \le x \le 1$, ha un flesso in $x = 1$ ed è concava per $x \ge 1$. Raccogliendo tutte queste informazioni si ricava il grafico in figura. Per quel che riguarda l'equazione della retta tangente r nel punto di flesso si ha

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \to \quad y = \frac{5}{2} + 2(x-1) \quad \to \quad y = 2x + \frac{1}{2}.$$

4) L'area A_n evidenziata in figura si ottiene come (integrando per parti il termine $x^2 \log x$)

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[f(x) - (2x + \frac{1}{2}) \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \log x \right] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^3}\log(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

5) Si ha che A_n tende a $1/9$ per n che tende a $+\infty$ e questo fatto si giustifica osservando che la porzione di piano di cui al punto 4) tende ad essere la porzione delimitata dalla curva C, dalla retta tangente R e dalle due rette $x = 1$ e $x = \lim(1/n) = 0$, di area

$$A_\infty = \int_0^1 \left[f(x) - (2x + \frac{1}{2}) \right] dx = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{9} \right]_0^1 = \frac{1}{9}$$

osservando che la funzione fra parentesi quadre, pur non essendo definita in 0 è ivi estendibile con continuità.