ESAME DI STATO
CORSO DI ORDINAMENTO
ANNO 2008-2009

PROBLEMA1

1) L'area richiesta è la differenza dell'area del settore circolare $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi} \rightarrow A = \frac{xr^2}{2}$

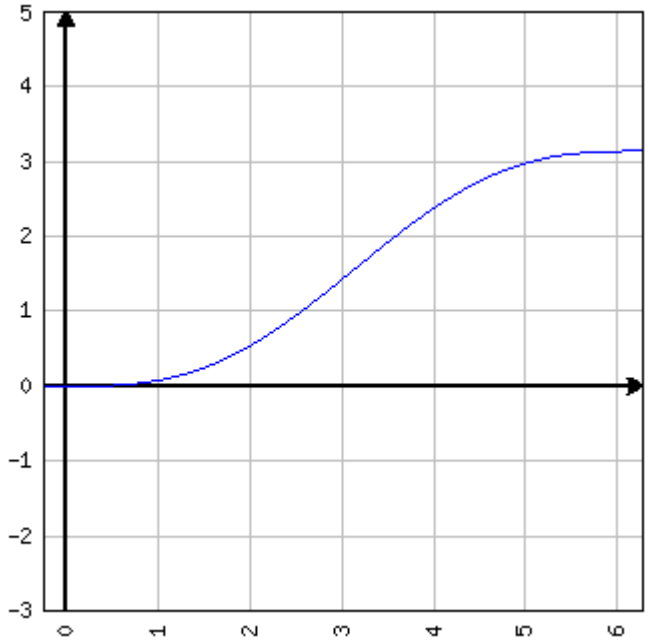
e quella del triangolo AOB, cioè

$S(x) = \frac{1}{2}r^2 x - \frac{1}{2}r^2 \sin(x) = \frac{1}{2}r^2[x - \sin(x)]$ con $x \in [0,2\pi]$

2) Posto r=1 si ha $S(x) = \frac{1}{2}[x - \sin(x)]$.

Studiamo la funzione in $[0,2\pi]$.

a. Dominio: $[0,2\pi]$
b. Intersezione asse ascisse: l'equazione $x - \sin(x) = 0$ ha una unica soluzione $x = 0$. Infatti la funzione $S(x) = \frac{1}{2}[x - \sin(x)]$ è strettamente crescente in $[0,2\pi]$ in quanto la sua derivata è $S'(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(x)]$.
c. Intersezione asse ordinate: $(0,0)$
d. Positività: la funzione è positiva in tutto il dominio in quanto la bisettrice sta sempre al di sopra della funzione seno, basta rappresentare in un unico sistema i grafici della bisettrice e della funzione seno
e. Asintoti: non esistono
f. Crescenza e decrescenza: $S'(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(x)]$ per cui la funzione è strettamente crescente in $[0,2\pi]$ e si annulla in $x = 0, x = 2\pi$. Inoltre $(0,0)$ è un minimo assoluto e $(2\pi, \pi)$ è un massimo assoluto
g. Flessi: $S''(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ per cui in $[0,\pi[$ la funzione volge la concavita verso l'alto, per cui $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ è flesso a tangente obliqua. Il grafico è sotto presentato:



3) Imponendo $S(A\hat{O}B) = \frac{1}{2}r^2 x = 100 \Rightarrow x = \frac{200}{r^2}$. Il perimetro di AOB è $2p = f(r) = 2r + rx = 2r + \frac{200}{r}$. La derivata prima del perimetro, per r>0, è $f'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}$ che è strettamente decrescente in (0,10) e strettamente crescente in $(10,+\infty)$ per cui il perimetro assume valore minimo per r=10 cui corrisponde $x = \frac{360°}{\pi} = 114{,}59°$

4) Poniamo r=2 e $x = \frac{\pi}{3}$ e mettiamo il lato OB sulle ascisse di un sistema di riferimento cartesiano con O coincidente con l'origine. In questo modo la retta OA ha equazione $y = x\sqrt{3}$ per cui il volume è somma di due volumi : il primo determinato quando il lato del quadrato ha ascissa che varia tra le ascisse della retta $y = x\sqrt{3}$ (cioè in $[0,1]$) e il secondo quando il lato ha ascissa che varia tra le ascisse dell'arco di cerchio $\sqrt{4-x^2}$ (cioè in [1,2]). Tale volume vale allora

$$V = \int_0^1 \left(x\sqrt{3}\right)^2 dx + \int_1^2 \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1 + \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right)\right] = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

PROBLEMA 2

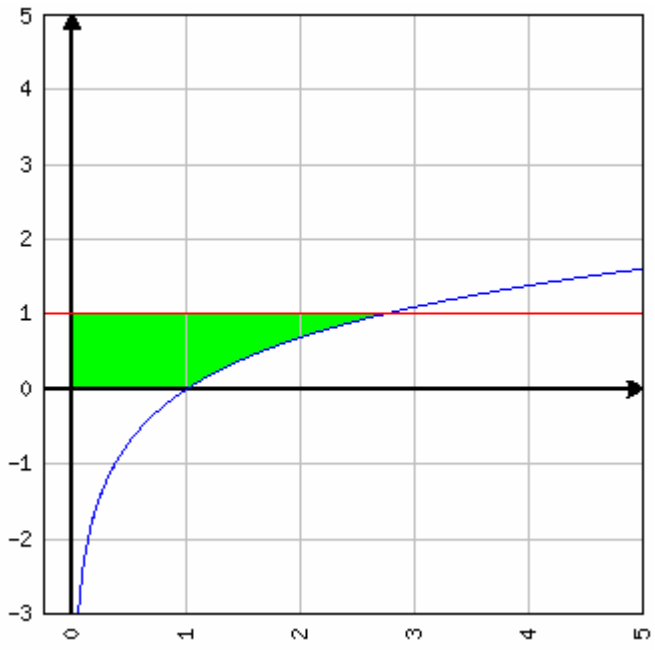
1) Il punto P ha coordinate $P(t,\ln t)$ e la tangente in P alla funzione $f(x)=\ln(x)$ è $y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln(t)$ ed il punto A è $A(0,\ln(t)-1)$, mentre $B(0,\ln t)$. Il segmento AB ha lunghezza $\overline{AB}=|\ln(t)-(\ln(t)-1)|=1$.

La proprietà vale sempre indipendentemente dalla base del logaritmo. Infatti se $g(x)=\log_a(x)$ la tangente è $y=\frac{1}{t\ln a}(x-t)+\frac{\ln(t)}{\ln a}$ per cui $A\left(0,\frac{\ln(t)-1}{\ln a}\right)$ e $B\left(0,\frac{\ln t}{\ln a}\right)$ per cui $\overline{AB}=\left|\frac{\ln(t)}{\ln a}-\frac{(\ln(t)-1)}{\ln a}\right|=\frac{1}{\ln a}$.

2) Il punto P di ascissa 1 di $g(x)=\log_a(x)$ è P(1,0) per cui la tangente è $y=\frac{x}{\ln a}$; imponendo $\frac{1}{\ln a}=\tan(45°)=1\Rightarrow \ln a=1\Rightarrow a=e$.

Mentre posto $\frac{1}{\ln a}=\tan(135°)=-1\Rightarrow \ln a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{e}$

3) L'area è in verde:



L'intersezione di $f(x)=\ln(x)$ con y=1 è (e,1) per cui l'area è

$$Area=\int_0^e[1]dx-\int_1^e[\ln x]dx=e-[x(\ln x-1)]_1^e=e-1$$

4) Calcolo l'area della corona circolare di raggio interno 1 e raggio esterno $\left(e^{y}+1\right)$ ed è pari a $\pi\left[\left(e^{y}+1\right)^{2}-1\right]=\pi\left(e^{2y}+2e^{y}\right)$ per cui il volume è

$$\pi\int_{0}^{1}\left(e^{2y}+e^{y}\right)dx=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}+2e^{y}\right]_{0}^{1}=\pi\left[\frac{e^{2}+4e-5}{2}\right]$$

QUESITI

1) Per definizione f(x) è una primitiva di sen x e dunque è una delle infinite funzioni rappresentate dall'integrale indefinito della funzione di partenza (sen x):

$f\left(x\right)=\int\sin(x)dx=-\cos(x)+c$, dove C è una costante arbitraria.

Il testo ci dice che il grafico passa per il punto (0, 2), dunque sappiamo che f(0)=2, cosa che ci permette di ricavare C.

$f(0)=2\rightarrow 2=c-1\rightarrow c=3\rightarrow f\left(x\right)=3-\cos(x)$

2) Di funzioni suriettive da A in B ve ne sono, ad esempio quella che mappa a in 1, b in 2 e c in 3. Non possono esistere funzioni iniettive in quanto la cardinalità di A è 4 e quella di B è 3. Pertanto non possono esistere funzioni biiettive.
Esistono precisamente 24 funzioni suriettive, perché esistono 4 partizioni dell'insieme B in 3 parti, e ciascuna delle tre parti può corrispondere ad uno ed un solo elemento di A in 6 (=3!) modi, per cui le funzioni suriettive da A a B sono 4*3!=4!=24.

3) La curva è un polinomio di terzo grado, dunque funzione continua e derivabile ovunque. I punti a tangente orizzontale coincidono quindi con i punti stazionari, cioè i punti con derivata prima nulla.
Procediamo al calcolo della derivata prima. $y'=3x^2+2kx+3$. Poniamo questa derivata uguale a zero: $3x^2+2kx+3$ =0. Un polinomio di secondo grado può avere due radici reali o due radici complesse coniugate. Per rispondere al problema, dobbiamo imporre che abbia due radici reali coincidenti, il che succede quando il determinante è uguale a zero.
$\frac{\Delta}{4}=k^2-9=0$ dunque $k=\pm 3$.

4) L'affermazione è falsa, nel senso che non esiste alcun poliedro regolare con facce esagonali. La motivazione sulla impossibilità è la seguente: perché un poliedro sia regolare le facce devono essere tutte congruenti fra loro e devono essere poligoni regolari. Naturalmente anche i diedri e gli angoloidi devono essere tutti congruenti tra loro. In particolare ci soffermiamo agli angoloidi: devono esistere almeno tre facce che confluiscono a ciascun vertice (e che costituiscono un triedro), ma perché l'angoloide sia ben definito la somma degli angoli delle facce che confluiscono allo stesso vertice deve essere minore di un angolo giro (a meno che il poliedro non sia concavo, ma in tal caso non potrà essere regolare). Un angolo di un esagono regolare misura 120°, e il triplo di tale misura è proprio 360°, cioè l'angolo giro.
Per questo motivo non possono esistere poliedri regolari a facce esagonali ovvero a facce poligonali con più di sei lati.

5) L'unica espressione a cui è attribuibile un valore numerico è $\frac{0}{1}=0$.

Le altre espressioni hanno significato solo nella teoria dei limiti. Sono forme indeterminate, e possono assumere valori diversi a seconda del tipo di funzione.

La seconda $\frac{0}{0}$ può assumere qualsiasi valore o può anche non esistere,
la terza $\frac{1}{0}$ può assumere valore (sempre come limite) di + o – infinito, ma può anche non esistere, la quarta è spesso oggetto di discussione tra i matematici, ma anch'essa può assumere qualsiasi valore, anche se limitatamente al campo di definizione, dunque dovrebbe essere assunta come positiva.

6) Il limite richiesto è $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$

7) $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{\underbrace{k!\cdot k+1}_{(k+1)!}}\cdot\overbrace{\frac{n-k}{(n-k)!}}^{\frac{1}{(n-k-1)!}}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\binom{n}{k+1}$

8) Non potendo risolvere direttamente l'equazione data, proviamo a studiare la funzione
$f(x)=x^{2008}+2009x+1$
Tale funzione è un polinomio di grado dispari, che ha quindi almeno una soluzione reale. Ma è anche in particolare una funzione continua e derivabile per ogni x reale. Dunque possiamo dimostrare facilmente, attraverso lo studio del segno della derivata prima, che essa è strettamente crescente, e dunque iniettiva, per cui l'equazione data ha un'unica soluzione reale.
$f'(x)=2009x^{2008}+2009=2009\cdot(x^{2008}+1)$
Entrambi i fattori sono positivi (poiché 2008 è un numero pari), per cui f'(x)>0 per ogni x reale e f(x) è strettamente crescente in tutta la retta reale.
Il testo chiede che la soluzione sia compresa tra -1 e 0. Basta applicare il teorema di esistenza degli zeri all'intervallo [0,1], dopo aver verificato che f(-1)<0 ed f(0)>0. Ricaviamo pertanto questi due valori della f.
$f(-1)=(-1)^{2008}+2009\cdot(-1)+1=1-2009+1=-2007<0$
$f(0)=(0)^{2008}+2009\cdot(0)+1=1>0$
Il teorema di esistenza degli zeri ci garantisce che almeno una soluzione appartiene all'intervallo (-1,0), ma noi abbiamo già verificato che è l'unica.

9) Utilizziamo la figura del testo, e consideriamo le sezioni dei vari solidi con piani paralleli alle basi del cilindro: alla base di diametro AB, la circonferenza di diametro AB appartiene interamente sia al cono sia alla scodella, mentre la sezione piana che contiene la base del cilindro di diametro CD ha in comune il punto V con il cono e la circonferenza con la scodella, ed entrambe le figure piane hanno area nulla. Questo ci garantisce che il cono e la scodella sono ben posizionati come in figura.
Dimostriamo, secondo Cavalieri, che ad una generica altezza, le sezioni con lo stesso piano (della scodella e del cono) sono equivalenti:
chiamiamo R la misura del raggio del cilindro e della sfera. Chiamiamo O il centro del cerchio di diametro AB. Ad una certa altezza h, prendiamo il punto P, intersezione del piano sezione con il segmento VO, con PO di lunghezza h, e, considerando una sezione verticale della figura, chiamiamo Q l'intersezione con una generatrice del cono e T l'intersezione con un punto della sfera. In seguito utilizzeremo non h ma r=R-h.

La sezione del cono risulta essere un cerchio di raggio $r = PQ = VP = R - h$
Mentre la sezione della scodella risulta essere una corona circolare di raggio maggiore R e di raggio minore $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$
L'area della sezione del cono è dunque $\pi \cdot r^2$
L'area della sezione della scodella è $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r'^2 = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot r^2$ C.V.D.

10) Ricordando il significato di funzione periodica ed il periodo della funzione cos x,
$f(x + kT) = \cos\left(5(x + kT)\right)$ che deve essere uguale a $f(x) = \cos(5x) = \cos(5x + 2h\pi)\ \forall h \in Z$
Otteniamo, con h=k, $5x + 2k\pi = 5x + 5kT$ da cui $T = \frac{2}{5}\pi$.

A cura di
Luca Lussardi
Nicola de Rosa
Angela D'Amato
Antonio Bernardo