Il

linguaggio

universale

della

Matematica

INTRODUZIONE GENERALE ALLA TESINA

Scopo di questa tesina è fornire una critica e il più possibile veritiera caratterizzazione a più livelli di quella che, a mio avviso, costituisce forse una delle attività umane più stupefacenti e, al tempo stesso, meno comprese: vale a dire la Matematica. Quest'ultima, infatti, viene generalmente ritenuta una materia a sé stante e assolutamente priva, al di là delle nozioni più intuitive, di connessioni con la realtà e con il mondo in cui quotidianamente viviamo. A chi non la comprende in tutto il suo significato, la matematica sembra cioè, in sostanza, semplicemente il frutto di fredde costruzioni mentali e ragionamenti astratti e complicati che, dall'alto della loro trascendenza, non riescono a rapportarsi felicemente con la concretezza vitale del mondo terreno.

L'opposizione trascendenza-realtà terrena di cui parlo, non è solo una pura metafora di stampo metafisico; infatti, spesse volte la conoscenza matematica assume, soprattutto agli occhi dei non addetti ai lavori, il significato erroneo di conoscenza certa al cento per cento, vera ed inoppugnabile (quante volte infatti nel linguaggio comune si sente usare l'avverbio "matematicamente" in sostituzione di "certamente"!), al quale segue poi necessariamente quello di insieme di verità incontrovertibili e assolute, che perlopiù vengono (purtroppo) dogmaticamente accettate come valide.

Questo testo, in contrapposizione per certi aspetti alla mentalità del "la matematica non è un'opinione", vuole invece in primo luogo mostrare, paradossalmente, come la matematica possa essere vista anche *come* un'opinione, in quanto costituita da teorie (i cosiddetti *sistemi formali*) che si prefiggono come scopo non la *verità* degli enunciati formulati, bensì la più debole *coerenza sintattica* degli stessi − a cui rinvia il concetto di *dimostrabilità logica* a partire da principi primi *arbitrari* posti a fondamento delle teorie stesse −. I sistemi formali, argomento centrale della prima sezione di questa tesina, introducono dunque nell'attività matematica un forte senso di *relativismo*, pur mantenendo intatta la certezza e il rigore logici che da sempre sono caratteristiche peculiari della matematica (e che tuttavia, a dispetto dell'apparente onnipotenza della dimostrazione matematica, presentano anch'essi, come vedremo, notevoli limitazioni).

Il relativismo e la mancanza di fondamenti certi all'interno della matematica, argomenti già introdotti nella prima sezione sui sistemi formali, vengono poi ripresi e ampliati nella seconda sezione a carattere filosofico; in tale contesto si analizzano le cause della cosiddetta "crisi dei fondamenti" della matematica di fine Ottocento e inizio Novecento, oltre che i falliti tentativi, da parte delle scuole filosofiche logicista, intuizionista e formalista, di risolvere la crisi riducendo il complesso e multiforme edificio matematico ad una sola entità, disciplina o facoltà umana.

Dopo l'analisi critica delle possibilità e dei limiti logici e filosofici entro i quali si colloca la matematica, nella terza ed ultima sezione viene descritto, invece, il ruolo della stessa come *linguaggio universale* delle scienze sperimentali (da qui il titolo della tesina); infatti, come vedremo mediante alcuni esempi ricavati dalla Biologia e dalla Fisica, la matematica riesce, con i suoi potenti strumenti (tra cui gli importantissimi operatori dell'Analisi Infinitesimale), a dedurre e ad esprimere nella sua lingua tutte le leggi che regolano i fenomeni naturali, realizzando così, anche nelle sue costruzioni più astratte, una formidabile e sorprendente fusione con il mondo reale (in conformità con la visione galileiana della scienza e in contrasto con l'opinione comune delineata all'inizio di questa introduzione).

Per quanto concerne gli strumenti utilizzati per la stesura di questa tesina, la maggior parte del materiale informativo è costituito dai libri indicati nella bibliografia finale; informazioni supplementari e immagini sono state invece tratte dai siti Internet presenti nella sitografia finale.

Infine, il motivo che mi ha spinto a intraprendere questo insolito percorso multidisciplinare sulla matematica consiste fondamentalmente nella mia grande passione per questa disciplina, in virtù delle stupefacenti connessioni che essa organicamente crea tra tutte le sue parti, e in virtù di quelle che essa crea tra le varie scienze. Tuttavia, lontano dallo scrivere un riduttivo elogio ai meri aspetti positivi e perfetti, ho voluto fornire, in questa tesina, una critica visione a tutto tondo della matematica, rappresentandola sì come l'attività umana più impressionante e potente nell'ambito della comprensione scientifica della Natura, ma anche come un'attività che, tanto quanto la ragione umana che l' ha creata, risulta essere irrimediabilmente limitata.

1. La matematica come sistema logico deduttivo

1.1. Introduzione ai sistemi formali

Il metodo scientifico elaborato da Galileo Galilei nel XVI secolo, il quale è la base delle moderne scienze naturali (come ad esempio la fisica, la chimica, la biologia, la geologia etc…), prevede un primo momento induttivo basato sull'osservazione dei fenomeni naturali e sulla raccolta di dati quantitativi relativamente alle grandezze caratterizzanti i fenomeni stessi, un secondo momento deduttivo di interpretazione matematica dei dati raccolti, e un terzo momento induttivo di verifica sperimentale delle ipotesi matematiche formulate. L'interpretazione matematica è quella che consente allo scienziato di stabilire, entro i limiti degli inevitabili errori sperimentali di misura, in quali rapporti si trovino le grandezze misurate, e dunque di dedurre, a partire da questi, una legge atta a definire univocamente, in termini per l'appunto matematici, le proprietà e le relazioni causa-effetto che legano tra loro i corpi o i sistemi che partecipano al fenomeno osservato. Da questo punto di vista, è ovviamente essenziale che la teoria matematica descrivente un certo fenomeno naturale sia in perfetto accordo con l'esperienza che si ha del fenomeno stesso, cioè che la deduzione non contrasti l'induzione, pena la perdita di validità del suddetto modello matematico. Nelle scienze sperimentali forgiate secondo il metodo galileiano, dunque, si può ragionevolmente affermare che sia l'induzione il principale criterio di verità nell'analisi delle dinamiche dei fenomeni naturali. Rispetto ad essa il momento deduttivo matematico risulta solamente essere un utile mezzo per interpretare, capire e descrivere la Natura in una maniera il più possibile oggettiva, semplice, chiara e universalmente valida, al di là dei singoli casi e delle singole tipologie di fenomeni.

All'interno della matematica stessa, invece, l'induzione e la deduzione giocano ruoli estremamente diversi. La matematica, come si è detto, è il codice lingua attraverso cui si interpretano gli eventi che avvengono in natura, ed è costituito da molteplici e specifiche entità astratte che, come le parole che comunemente si usano per comunicare, descrivono il mondo senza però farne fisicamente parte a guisa di entità reali e percepibili mediante l'esperienza sensibile. Pertanto le proprietà di questi enti e le loro reciproche relazioni non possono essere determinate secondo un metodo induttivo-deduttivo di tipo galileiano, bensì mediante metodi più propriamente deduttivi alla cui base si pone la scienza del linguaggio per definizione, vale a dire la logica. Questo segue appunto dal fatto che, non essendo reali gli enti di cui la matematica parla, il criterio fondamentale di verità non può più trovarsi nell'evidenza del mondo reale, ma nell'evidenza logica, cioè nella validità logica del ragionamento deduttivo.

Il ragionamento deduttivo rappresenta una delle parti più importanti, se non forse la più importante, del fare matematica, cioè del produrre teorie matematiche. È in definitiva lo strumento principe attraverso il quale, a partire da alcuni principi primi indimostrabili e assunti come veri, si perviene a considerazioni più complesse che discendono logicamente da questi. I principi primi indimostrabili posti a fondamento della teoria matematica vengono detti *postulati* o *assiomi*, mentre le considerazioni da essi derivate vengono dette *teoremi*. Un teorema è un enunciato *condizionale*, cioè del tipo "se T allora A", dove T sono gli assiomi della teoria e A è la conclusione conseguente logicamente da T. Il teorema è inoltre anche un enunciato *formale*, cioè una formula costituita da un linguaggio simbolico artificiale, costruita rispettando solo regole di correttezza logico-sintattica e priva di un significato intrinseco (relativamente a questi aspetti, vedremo in seguito cosa s'intenda con i termini *sintassi* e *semantica*).

A questo proposito, nel prossimo paragrafo approfondiremo proprio quelle che vengono chiamate teorie matematiche formali o sistemi formali, a cui abbiamo fatto brevemente riferimento.

1.2. I SISTEMI FORMALI

Una teoria matematica T è detta *formalizzata* quando sono definiti il suo linguaggio L e l'universo U di oggetti a cui essa si riferisce. La teoria, simbolicamente rappresentata dall'espressione T = (L , U), si dice allora *teoria formale* o *sistema formale*.

Il linguaggio L deve specificare:

- i simboli con cui vengono espressi gli enunciati della teoria;
- i criteri di formazione delle espressioni, cioè le regole con cui i simboli si possono combinare tra loro per produrre espressioni corrette all'interno del linguaggio;
- le espressioni scelte come assiomi (i quali, come già detto, vengono *assunti come veri* senza però dover necessariamente trovare un riscontro con la realtà contingente e con il "senso comune");
- le regole di deduzione per mezzo delle quali, a partire dagli assiomi, si ricavano altre espressioni.

Come già anticipato, le espressioni che, attraverso una sequenza di deduzioni, possono essere derivate logicamente a partire dagli assiomi vengono dette teoremi. La sequenza logica attraverso cui un teorema viene dedotto si chiama invece *dimostrazione*.

Quando l'insieme di oggetti di U è definito in modo da dare un significato ai simboli del linguaggio si ha una *interpretazione* di L. Un'interpretazione che rende veri tutti gli assiomi di L è detta *modello* di L.

1.2.1. La teoria e la metateoria

Una teoria matematica formale, che studia le proprietà di determinati oggetti o enti matematici, può essere a sua volta oggetto di studio di una seconda teoria detta *metateoria* e indicata con il simbolo MT. MT è dotata di un proprio linguaggio ML e studia le proprietà di L. L costituisce pertanto, per quanto sopra affermato, l'universo di MT, e viene perciò detto *linguaggio-oggetto*. Utilizzando l'espressione simbolica di prima si avrà dunque MT = (ML , L).

Spesso linguaggio-oggetto L e metalinguaggio (linguaggio proprio della metateoria) ML risultano essere coincidenti, ad esempio nel caso in cui si usa l'italiano (linguaggio della metateoria) per descrivere aspetti linguistici che caratterizzano la lingua italiana stessa (linguaggio-oggetto): è ovviamente importante, nell'analisi dei sistemi formali, saper bene distinguere tra linguaggio della teoria e metalinguaggio.

1.2.2. La sintassi e la semantica

Lo studio metateorico di una teoria T può svilupparsi in due direzioni diverse: la *sintassi* e la *semantica*.

La *sintassi* di T è l'analisi del linguaggio L della teoria, indipendentemente dall'universo U di oggetti a cui T fa riferimento, condotta occupandosi solo della sua struttura e delle regole a cui esso obbedisce (un esempio di sintassi è dato dal caso, analogo a quello discusso nel precedente paragrafo, in cui vengono definiti gli elementi grammaticali di un linguaggio come l'italiano).

La *semantica* di T è invece l'analisi dello stesso linguaggio L della teoria rapportato all'universo U, considerando cioè la verità o la falsità dei suoi enunciati rispetto al mondo degli oggetti di cui parla (un esempio di semantica è dato dal caso in cui si costruiscono espressioni del tipo "L'enunciato *snow is white* è vero nella lingua inglese").

Lo studio sintattico pone l'accento sul problema della correttezza logico-formale e quindi sulla *coerenza* (sintattica: cfr. paragrafo seguente) di T, mentre lo studio semantico concentra la propria attenzione sulla *verità* di T, cioè sull'aderenza delle sue affermazioni alle proprietà degli oggetti di U. Mentre fino agli inizi dell'Ottocento, il modo di intendere gli assiomi delle teorie matematiche era fondato su un approccio semantico, dopo la nascita delle geometrie non euclidee si assistette invece allo sviluppo, da parte del matematico formalista David Hilbert (1862-1943), di una prospettiva moderna in base a cui si poneva l'attenzione sullo studio sintattico delle teorie.

La distinzione tra sintassi e semantica permette di chiarire il significato di due concetti che, per la loro affinità, sono stati spesso confusi nel corso della storia della matematica: *dimostrabilità* e *verità*. Con *dimostrabilità* di un'espressione s'intende una proprietà puramente sintattica, la quale indica l'esistenza di una catena di espressioni che, a partire dagli assiomi, per mezzo delle regole di deduzione ammesse in L, conduce all'espressione che si vuole dimostrare. La *verità* è invece un concetto semantico, che stabilisce una relazione tra un'espressione di L e le proprietà degli oggetti dell'universo U a cui la teoria formale si riferisce. Mentre la dimostrabilità è una proprietà intrinseca al linguaggio L, la verità dipende dall'interpretazione di L, cioè dal rapporto tra L e U. In tal modo, nell'espressione "per x e y qualunque si ha che: [(x # successore di y) = (successore di x # y)]", si ha che, se interpretiamo la funzione # come addizione, l'espressione è vera; è falsa se la stessa funzione è interpretata come moltiplicazione.

1.2.3. Alcune proprietà dei sistemi formali: coerenza (sintattica e semantica), completezza (sintattica e semantica), decidibilità

Le più importanti proprietà di cui possono godere i sistemi formali sono coerenza sintattica, coerenza semantica, completezza sintattica, completezza semantica e decidibilità.

Una teoria T si dice *coerente sintatticamente* se non esiste in essa alcun enunciato A tale che A e non-A (negazione di A) siano entrambi teoremi di T: non è cioè possibile dedurre dagli assiomi di T sia l'enunciato A sia l'enunciato non-A e arrivare dunque ad una contraddizione logica.

Una teoria T si dice invece *coerente semanticamente* (o *corretta*) se essa è tale da poter dimostrare solo enunciati veri (come abbiamo visto infatti, la verità è un concetto di carattere tipicamente semantico, discendente dall'interpretazione del linguaggio L, e non ha nulla a che vedere con la dimostrabilità sintattica).

Una teoria T si dice *completa sintatticamente* se, per ogni enunciato A, essa è capace di dimostrare A oppure non-A: gli assiomi della teoria consentono dunque di dimostrare qualunque enunciato A oppure la sua negazione.

Una teoria T si dice invece *completa semanticamente* se essa riesce a dimostrare ogni enunciato vero (in relazione all'interpretazione di L adottata) ; in questo caso dunque non è possibile che un enunciato vero A non sia un teorema di T.

Infine, una teoria T si dice *decidibile* se esiste un procedimento meccanico per dimostrare, in un numero finito di passaggi, se un qualsiasi enunciato A è un teorema di T oppure no, cioè se esiste una sua dimostrazione (o una sua *refutazione*, cioè la dimostrazione della sua negazione non-A) a partire dagli assiomi. In caso contrario, se la teoria è indecidibile, questa procedura meccanica non esiste e la dimostrazione dei teoremi può richiedere una certa dose di ingegno.

È importante notare che la coerenza semantica è una proprietà più forte della coerenza sintattica, in quanto la prima implica la seconda (in generale non vale però il viceversa); infatti se un sistema formale T è sintatticamente incoerente, a partire dai suoi assiomi è possibile dimostrare sia un enunciato A sia la sua negazione non-A, arrivando pertanto ad una contraddizione. Dato inoltre che una contraddizione logica non può mai essere vera, quale che sia l'interpretazione del linguaggio L del sistema formale in questione, T è anche semanticamente incoerente, proprio in quanto dai suoi assiomi deriva una conseguenza sicuramente falsa. In generale invece se un sistema formale T è semanticamente incoerente, non è detto che lo sia anche da un punto di vista sintattico; infatti esso può dimostrare enunciati falsi (secondo una certa interpretazione del linguaggio della teoria) senza condurre per questo necessariamente a contraddizioni.

È auspicabile che una teoria formale T possieda tutte queste proprietà. Una teoria formale che voglia costituire la base dell'intera conoscenza matematica deve essere coerente e completa (dai due punti di vista sintattico e semantico).

1.2.4. I teoremi d'incompletezza dell'Aritmetica di Kurt Gödel e la crisi del Programma di Hilbert

Proprio sulla proprietà della coerenza di un sistema formale poneva l'attenzione il programma fondazionalista del matematico formalista tedesco David Hilbert. Secondo Hilbert, la matematica poteva finalmente superare quella "crisi dei fondamenti" (sulla quale rimando alla sezione sulla filosofia della matematica del Novecento), che l'aveva drammaticamente scossa tra fine Ottocento e inizio Novecento, solamente con una nuova considerazione della matematica che vedesse in essa una grande teoria completamente formalizzata (e costituita dunque da tutti gli elementi visti sopra). Da questa visione della matematica come sistema formale, deriva poi la creazione di una nuova disciplina interna alla matematica, la *metamatematica* o *teoria della dimostrazione,* la quale svolge la funzione di metateoria della matematica: essa infatti ha come linguaggio-oggetto il sistema formale della matematica, e si occupa di dare dimostrazioni intorno alle espressioni che possono, o non possono, essere dimostrate nel sistema formale matematico. Hilbert ha, dunque, l'ambizioso progetto di dare un solido fondamento alla conoscenza matematica, dimostrando, all'interno della metamatematica, la coerenza del sistema formale dell'aritmetica (branca sulla quale, dopo la crisi innescata dalle geometrie non-euclidee, si riteneva essere fondato tutto il sapere matematico).

Paradossalmente, proprio dedicandosi al grande programma fondazionale hilbertiano, il logico matematico austriaco Kurt Gödel dimostrò i suoi famosi "teoremi d'incompletezza dell'Aritmetica", i quali, mostrando inequivocabilmente che il suddetto scopo di Hilbert non avrebbe mai potuto essere raggiunto, segnarono definitivamente il tramonto di tutta la concezione formalistica della matematica.

Vedremo qui di seguito di ripercorrere, in maniera semplificata, lo schema generale del ragionamento fatto da Gödel per dedurre questi teoremi (che per semplicità verranno enunciati secondo una versione di tipo semantico), soffermandoci poi sulle loro conseguenze nei confronti del programma di Hilbert.

I teoremi di Gödel sono applicabili a teorie formalizzate T il cui grado di complessità è tale per cui essi riescono ad esprimere una parte dell'aritmetica detta "elementare": sistemi così definiti vengono detti *sufficientemente potenti*.

Prendiamo quindi in considerazione un sistema formale T sufficientemente potente, che sarà dotato di un proprio linguaggio L, e poniamo che esso sia semanticamente coerente, ossia, per quanto detto nel paragrafo precedente, che esso possa dimostrare unicamente enunciati veri nell'interpretazione di L adottata.

Ora, supponiamo anche che si possa esprimere in una certa maniera, nel linguaggio formalizzato L di T, un enunciato *autoreferenziale* (cioè un enunciato che si riferisce a se stesso) G_T espresso come segue:

(G_T) " G_T non è dimostrabile in T ". È naturale, a questo punto, chiedersi se G_T sia effettivamente dimostrabile, o meno, in T. Poniamo quindi che G_T sia dimostrabile; sotto questa ipotesi, allora G_T è falso, dal momento che sostiene di non essere dimostrabile. Questo significa dunque che il sistema formale T è *semanticamente incoerente*, poiché consente di dimostrare un enunciato falso.

Al contrario, se T è effettivamente coerente dal punto di vista semantico, l'enunciato G_T è vero, e perciò non è dimostrabile in T; da questo si deduce quindi che T è un sistema formale *semanticamente incompleto*: infatti ci troviamo nella condizione in cui esiste un enunciato vero, appunto G_T, che T non può dimostrare, cioè che non è un teorema di T. Inoltre, poiché G_T è vero, la sua negazione non-G_T (che viene indicata simbolicamente con $\neg G_T$) sarà falsa. Perciò, dato che nel sistema formale T, supposto coerente semanticamente, gli enunciati falsi non sono dimostrabili, si deduce, per quanto discusso prima, che né l'enunciato G_T né la sua negazione $\neg G_T$ sono teoremi di T, e pertanto T è anche *incompleto dal punto di vista sintattico*: esiste infatti un enunciato, tale che né esso né la sua negazione sono dimostrabili in T. Di conseguenza, per quanto detto nel precedente paragrafo, l'enunciato G_T è *indecidibile* in T. Ecco quindi dimostrata la versione semantica informale del cosiddetto *Primo Teorema di Incompletezza di Gödel*, il cui enunciato è il seguente: "Se T è un sistema formale sufficientemente potente e semanticamente coerente, allora esiste un enunciato G_T formulato nel linguaggio L di T, tale che G_T è indecidibile in T, ossia né dimostrabile né refutabile in T."

Enunciati del genere di G_T vengono detti *enunciati gödeliani* di un determinato sistema formale: nel caso appena esposto, G_T è l'enunciato gödeliano di T.

Siamo così giunti ad affermare che, se T è un sistema formale coerente semanticamente, allora G_T non è dimostrabile in T.

Si può dimostrare, inoltre, che la tesi riguardante l'indimostrabilità di G_T vale anche se si assume l'ipotesi più debole che il sistema formale T sia solo *sintatticamente coerente*. Infatti, ponendo per ipotesi G_T dimostrabile in T, da ciò verrebbe dimostrata la negazione di G_T (che, per come è stato definito G_T, afferma appunto che G_T è dimostrabile in T). Pertanto, sia G_T sia $\neg G_T$ sarebbero dimostrabili, e ciò darebbe origine ad una contraddizione logica e quindi all'incoerenza sintattica di T. Da qui si inferisce che, se un sistema formale vuole essere sintatticamente coerente, allora G_T non può essere un teorema di T.

Analizziamo ora il *Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel*, il cui enunciato in versione semantica informale è il seguente: " Se T è un sistema formale sufficientemente potente e semanticamente coerente, allora T non può dimostrare la propria coerenza.". Supponiamo che, per ipotesi, T possa dimostrare la propria coerenza (cioè sia possibile, all'interno del sistema formale T, dimostrare l'enunciato "T è coerente"). Allora l'enunciato "T è coerente" costituirebbe l'ipotesi del teorema sopra dimostrato "Se T è coerente, allora G_T non è dimostrabile in T", il quale, per come è stato definito G_T, equivale all'enunciato "Se T è coerente, allora G_T". Da qui, applicando la semplice regola di inferenza del *modus ponens* (la quale è descritta informalmente dal ragionamento: "*Se B è conseguente logicamente da A, e A è dato per ipotesi, allora si deduce B*"), si potrebbe dimostrare G_T. Ma questa è una conclusione assurda in quanto esclusa dal Primo Teorema d'Incompletezza: l'ipotesi da cui si è partiti dunque è falsa in quanto porta a contraddizione logica, pertanto è dimostrata la sua negazione, cioè che T, nelle ipotesi fatte, *non* può dimostrare la propria coerenza (questa regola di inferenza, molto usata nelle dimostrazioni matematiche, viene denominata *reductio ad absurdum* – riduzione all'assurdo- e dimostra un enunciato A, mostrando logicamente che la sua negazione $\neg A$ conduce ad una contraddizione rispetto a ipotesi di partenza ritenute vere, e che pertanto quest'ultima è falsa).

Dopo aver enunciato e dimostrato, in via semplificata, il contenuto dei due Teoremi di Incompletezza, vediamo, infine, in che senso essi decretano il fallimento definitivo del programma di Hilbert.

Come si è visto, Hilbert si proponeva di dimostrare la coerenza dell'aritmetica formalizzata utilizzando ragionamenti di tipo metamatematico; nelle intenzioni fin troppo ottimiste del formalista tedesco, questa dimostrazione metamatematica avrebbe dovuto essere formalizzabile in un sistema in grado di esprimere la stessa aritmetica, cioè con le stesse caratteristiche del sistema formale T di cui sopra. Tuttavia, in virtù del Secondo Teorema di Incompletezza, queste intenzioni sono impossibili da realizzare: infatti, stando al teorema, la dimostrazione di coerenza di T (sistema formale contenente l'aritmetica) non è formalizzabile in T. Pertanto, T non può auto-dimostrare dall'interno la propria coerenza, per la dimostrazione della quale si ha necessariamente bisogno di un’altra teoria formale, più ricca di T assiomaticamente e dal punto di vista del linguaggio, ma comunque anch’essa inevitabilmente soggetta alle medesime limitazioni imposte dai due Teoremi di Gödel.

1.3. Considerazioni conclusive: La matematica formalizzata tra rigore e limite

In conclusione, si può quindi delineare un sintetico quadro d’insieme degli aspetti più importanti della matematica che emergono da questa prima sezione:

a) l’attività matematica consta in larga misura di un momento logico-deduttivo, attraverso cui, a partire da un certo numero di espressioni e proprietà fondamentali (gli assiomi) attribuite agli enti di cui parla, ne deduce proprietà più complesse mediante la dimostrazione;
b) le teorie matematiche vengono rese più rigorose da un punto di vista logico mediante la formalizzazione, la quale rende espliciti gli enti a cui la teoria è riferita, i simboli su cui è basato il linguaggio formale utilizzato, le regole di formazione delle espressioni, gli assiomi, e le regole logiche di deduzione su cui si impernia il momento dimostrativo della teoria stessa;
c) le teorie matematiche formali possono godere di determinate proprietà, come la coerenza (sintattica e semantica), la completezza (sintattica e semantica) e la decidibilità;
d) i Teoremi di Incompletezza di Gödel rivestono un’importanza fondamentale, in quanto svelano l’illusoria velleità hilbertiana di poter dare stabilità al corpo delle conoscenze matematiche basandolo sulla coerenza e sulla completezza dell’aritmetica elementare formalizzata, ma soprattutto perché, più in generale, rendono evidente la limitatezza intrinseca della matematica descritta da sistemi formali sufficientemente potenti: in virtù di questi teoremi, se un sistema formale di questo tipo è coerente, non è completo (non potrà dunque dimostrare ogni enunciato espresso nel linguaggio del sistema, o la sua negazione); viceversa, se un sistema formale è completo, perde in coerenza (dando quindi luogo a contraddizioni); infine, se un sistema formale è coerente, non può dimostrare dall’interno la sua coerenza (e si ha quindi bisogno di teorie formali più ricche e complesse, anch’esse però ugualmente limitate dai due teoremi).

2. La matematica nel dibattito filosofico del primo ‘900: logicismo, formalismo e intuizionismo

In questa seconda sezione si cercherà di definire sinteticamente il concetto di “crisi dei fondamenti della matematica”, delineandone brevemente le cause. In seguito, verranno descritte tre tra le più importanti scuole di filosofia della matematica dei primi decenni del Novecento (logicismo, formalismo e intuizionismo), relativamente alle risposte da esse fornite per tentare di superare la crisi stessa.

2.1. La “crisi dei fondamenti” della matematica

2.1.1. Che cos’è la crisi dei fondamenti della matematica

Con crisi dei fondamenti della matematica si vuole indicare l'ampio dibattito che ha coinvolto l'intera comunità dei matematici, e dei filosofi, nel primo trentennio del XX secolo, incentrato sulla natura della matematica, cioè su quali siano, se ci sono, gli enti primitivi indimostrabili che costituiscono il punto di partenza di questa disciplina.

Come già accennato, le posizioni filosofiche più innovatrici diedero vita a vere e proprie scuole matematiche: l'Intuizionismo, il Formalismo e il Logicismo. Dalle nuove impostazioni epistemologiche derivò addirittura la nascita di nuove discipline, come la formalista "teoria della dimostrazione" o "metamatematica", ed il consolidamento di quelle emergenti, come la logica matematica (discipline alle quali abbiamo già fatto in parte riferimento nella sezione precedente, relativamente ai sistemi formali).

Nel prossimo paragrafo cercheremo di fare un sintetico e il più possibile chiaro resoconto della crisi, analizzandone le cause principali.

2.1.2. Le cause della crisi dei fondamenti della matematica

Le cause ultime della crisi dei fondamenti della matematica vanno senza dubbio ricercate nelle radicali trasformazioni che il corpo delle conoscenze matematiche ha subito nel corso del XIX secolo.

Queste profonde trasformazioni sono principalmente costituite dalla *nascita delle geometrie non-euclidee*, dalla *formalizzazione della geometria*, dalla *nascita dell'analisi moderna*, dall'*aritmetizzazione dell'analisi*, dalla *nascita della teoria degli insiemi*, dalla *nascita della logica matematica*, e infine dalla *logicizzazione dell'aritmetica*. Vediamo di descriverle in maniera abbastanza schematica.

a) La nascita delle geometrie non-euclidee

Le geometrie non-euclidee propongono, attraverso i loro più importanti ideatori János Bólyai (1802-1860), Nicolaj Ivanovič Lobacevskij (1793-1856) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), una visione del tutto nuova della geometria, la quale, fino all'Ottocento, era tradizionalmente identificata con il celeberrimo sistema assiomatico non formale degli *Elementi* dell'alessandrino Euclide (dominante da quasi due millenni, e la cui autorità e solidità logico-intuitiva erano così grandi, da fungere da fondamento di tutto il *corpus* matematico, e tali che non pareva immaginabile costruire geometrie diverse e altrettanto coerenti). Gli *Elementi* partono dalla definizione di alcuni enti primitivi (punto, retta, piano) derivanti dall'intuizione; il sistema è poi sviluppato assiomaticamente sulla base di cinque postulati, di cui il quinto in particolare, noto come *postulato delle parallele*, recita: "*Dati, in un piano, una retta e un punto esterno ad essa, esiste una e una sola retta, in quel piano, parallela a quella retta e passante per quel punto*". Secondo questo postulato, e conformemente alla definizione euclidea di retta parallela ad un'altra, l'unica retta parallela ad una retta r e passante per un punto P esterno ad r forma quattro angoli retti con la perpendicolare ad r passante per P.

È questo un postulato molto importante, in quanto è proprio dalla sua abolizione e sostituzione con postulati differenti, che prendono forma le costruzioni assiomatiche non-euclidee.

In particolare, la *geometria iperbolica* (ideata, indipendentemente l'uno dall'altro, da János Bólyai e da Nicolaj Ivanovič Lobacevskij) stabilisce che dati, in un piano, una retta e un punto esterno ad essa, esiste più di una retta, in quello stesso piano, parallela a quella retta e passante per quel punto. Secondo questo tipo di geometria, infatti, viene postulato che due rette s e s' passanti per un punto P esterno ad una retta r cessino di intersecare r quando gli angoli minori di un angolo retto □ e □' (formati rispettivamente dalla perpendicolare a r passante per P e dalle due rette s e s') raggiungono un valore comune □, che è detto *angolo di parallelismo* (sempre minore di un angolo retto). In questo modo, tra le infinite rette passanti per P e che non incontrano r, s ed s' vengono definite *parallele* ad r, mentre tutte le rette comprese tra s e s' (che formano con la stessa perpendicolare sopra considerata angoli maggiori di □) vengono chiamate *iperparallele*. Infine, le rette che formano con la suddetta perpendicolare angoli minori di □ intersecano la retta r e sono le secanti di r. Questo tipo di interpretazione del parallelismo deriva dall'aver considerato la retta r come un segmento privato dei suoi estremi: in tal modo sono secanti le rette che intersecano r nei punti interni al segmento, parallele quelle che incidono r agli estremi del segmento senza quindi intersecarla, e iperparallele le rette che non intersecano r, incontrando punti esterni al segmento.

La *geometria sferica*, ideata da Georg Friedrich Bernhard Riemann, reinterpreta la geometria del piano euclidea introducendo uno spazio di tipo curvo. Secondo questo modello di geometria, infatti, viene considerata una superficie □ di una sfera di raggio r e centro O. Il punto euclideo è ora interpretato come punto della superficie □ mentre per retta s’intende una qualsiasi delle circonferenze massime di □ (formate dall’intersezione tra □ e un piano qualunque passante per O). L’angolo tra due rette è l’angolo formato dai due piani che tagliano la superficie sferica □ secondo le due rette. Si può verificare che anche in questo modello il V postulato di Euclide non viene mantenuto; infatti non esistono rette parallele ad una retta data passanti per un punto P esterno ad essa: ovvero, tutte le rette sono tra loro incidenti.

In ogni caso, al di là delle peculiari caratteristiche di tutti i modelli geometrici elaborati in alternativa a quello euclideo (che in questa sede abbiamo solo accennato), ciò che è importante da tenere in considerazione, in riferimento alla nascita delle geometrie non-euclidee, è che esse sono portatrici di un *relativismo* mai presente prima di allora in matematica.

Si è sempre pensato che la matematica, e in particolare la geometria, nel loro partire da enti primitivi e assiomi immediatamente giustificati dall’evidenza intuitiva, potessero da questi coerentemente derivarne modelli unici nella loro solidità logica, e pertanto unici anche nella loro veridicità; come abbiamo visto infatti gli *Elementi* di Euclide costituivano l’unico e vero modello attraverso il quale poter descrivere lo spazio fisico. Filosoficamente, questo processo di assolutizzazione e dogmatizzazione della geometria euclidea è culminato con l’opera del filosofo tedesco Immanuel Kant (1724-1804) *Critica della ragion pura*, nella quale viene addirittura affermato che la realtà fisica fenomenica possiede una struttura geometrica di tipo euclideo, proprio perché la mente umana la percepisce e la ordina attraverso la forma immutabile a priori di spazio, che appunto è unicamente di tipo euclideo. È quindi come se la mente umana, proprio a causa delle forme a priori di cui è corredata, riuscisse a percepire come unico, vero e sensato solamente lo spazio euclideo.

Alla luce di tutto ciò, è quindi evidente la portata gnoseologicamente eversiva di questo nuovo tipo di geometrie, che paradossalmente, nonostante l’introduzione di postulati a prima vista contrari al senso comune, dimostrano di possedere una coerenza formale pari a quella euclidea (la loro coerenza è infatti implicata dalla coerenza della geometria euclidea). Appare pertanto l’ovvio interrogativo su quale sia la vera geometria dello spazio fisico, interrogativo al quale il fisico Albert Einstein, nel secondo decennio del XX secolo, darà una risposta di tipo euclideo-riemanniano con la sua teoria della gravitazione – inclusa nella teoria della relatività generale – , confermando, anche da un punto di vista fisico, la non superiorità del modello euclideo nei confronti delle nuove geometrie.

b) La formalizzazione della geometria da parte di David Hilbert

Lo sviluppo delle geometrie non-euclidee aveva messo in luce l’inaffidabilità del ricorso quasi dogmatico alle verità intuitivamente evidenti del sistema assiomatico non formale della geometria euclidea. Pertanto, si rende necessaria una rifondazione della teoria euclidea in chiave formale, che la depuri da qualunque riferimento all’intuizione. Questo programma è attuato dal matematico David Hilbert.

L'intenzione di Hilbert è quella di dare una presentazione della geometria euclidea tale che le proprietà degli enti primitivi indefiniti, che si *chiamano* "punto", "linea", "piano" (ma in realtà non corrispondono a niente in senso ontologico) appaiano vere solo perché dedotte meccanicamente dagli assiomi. In tal modo, il fatto che la geometria analizzata da Hilbert sia euclidea appare dunque come una *scelta* (derivante dalla scelta degli assiomi) del matematico che crea, e non come una *constatazione* di qualcosa creato da altri o esistente di per sé. Infatti, contrariamente alla gnoseologia a-priori di Kant, Hilbert non partiva da *intuizioni* ma da *scelte arbitrarie* e la sua geometria non parlava di oggetti *chiaramente intuiti*, ma di *qualsiasi cosa soddisfacesse gli assiomi scelti*.

Si può già notare la presenza, nel pensiero hilbertiano, di quella mentalità formalista che avrà un importante ruolo nel dibattito filosofico connesso alla crisi dei fondamenti.

c) La nascita dell’analisi moderna

L’analisi infinitesimale, nata grazie alle geniali idee dei matematici Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz tra il XVII e il XVIII secolo, nonostante costituisse un ambito in crescita sia dal punto di vista teorico sia da quello applicativo, verso la fine del XVIII secolo non appariva ancora una costruzione organica, coerente e con sicure fondamenta. Era quindi necessario procedere ad una fondazione rigorosa degli importantissimi quanto ancora oscuri concetti di infinito, infinitesimo, limite, derivata, integrale ecc…; questa fondazione venne poi completata nel corso dell’Ottocento, ad opera di matematici come (per citarne solo alcuni) Lagrange, Cauchy, Weierstrass e molti altri, segnando così la nascita dell’*analisi moderna*, cioè dell’analisi così come è oggi studiata.

d) <u>L’aritmetizzazione dell’analisi</u>

Con *aritmetizzazione dell’analisi* s’intende il tentativo di ridurre e ricondurre i principi dell’analisi all’aritmetica dei numeri naturali. Il programma riduzionistico aritmetizzante (un programma cioè che cerca nell’aritmetica il fondamento ultimo di tutta la matematica) prende vita, nella seconda metà dell’Ottocento, dalla rivoluzione delle geometrie non-euclidee, che avevano decretato la fine della supremazia euclidea, e, implicitamente, anche l’impossibilità di fondare la matematica su basi geometriche.

Il programma riduzionistico è già predisposto per quanto concerne i numeri relativi e razionali, introdotti come estensione dei numeri naturali al fine di rendere possibili le operazioni di sottrazione e di divisione, e anche per quanto riguarda la geometria, algebrizzata da Descartes e Fermat (primi ideatori di quella che viene comunemente chiamata *geometria analitica* o *cartesiana*). L’ostacolo più grande al processo di aritmetizzazione è invece rappresentato proprio dall’analisi, e dal suo fondamentale concetto di *continuità*: si affaccia, dunque, il problema della fondazione del continuo numerico; problema che implica appunto la definizione della continuità dell’analisi attraverso la discontinuità propria dell’aritmetica, e dunque la definizione dei numeri reali (in particolare, dei numeri irrazionali) a partire da quelli razionali.

La fondazione aritmetica del continuo viene affrontata, in special modo, tra il 1870 e il 1880, attraverso l’opera di due matematici in particolare: Richard Julius Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918).

Nella fattispecie Dedekind risolve dal canto suo il problema intendendo i numeri irrazionali come le “lacune” lasciate dai soli numeri razionali sulla retta dei numeri reali, in corrispondenza delle quali possono essere operati altrettanti “tagli” che la dividano ciascuno in due sottoinsiemi (detti *classi*) di numeri razionali; di questi due sottoinsiemi, quello posto a sinistra della lacuna contiene elementi razionali tutti minori (indefinitamente) del numero irrazionale definito dalla lacuna, mentre quello a destra contiene elementi razionali tutti maggiori dello stesso numero irrazionale. Il concetto di numero irrazionale viene dunque definito da Dedekind con procedimenti insiemistici.

Cantor, invece, definisce i numeri irrazionali come limiti di successioni e di serie convergenti, formate da determinate classi di numeri razionali, e che non convergono ad alcun numero razionale.

e) <u>La nascita della teoria degli insiemi</u>

A Georg Cantor si deve, oltre al suo tentativo di aritmetizzare l’analisi, anche la nascita della *teoria degli insiemi*. Questa teoria rivoluzionaria costruisce un nuovo concetto di numero attraverso la *cardinalità* e la *potenza* di un insieme, concetti tra loro affini e riferiti rispettivamente a insiemi contenenti un numero finito o infinito di elementi. La cardinalità e la potenza di un insieme finito o infinito consentono di valutarne la quantità di elementi, associando ad esso un numero cardinale; nel caso della potenza di un insieme infinito il numero cardinale corrispondente viene denominato *numero transfinito*.

Secondo Cantor, due insiemi sono equipotenti o equinumerosi (cioè hanno lo stesso numero di elementi) quando esiste una legge con la quale è possibile porre ogni elemento di un insieme in corrispondenza biunivoca con ciascun elemento dell’altro insieme. Sulla base di questi concetti, dunque, Cantor mette in relazione, confrontandole, le potenze dell’insieme dei numeri naturali **N**, dell'insieme dei razionali **Q**, e dell'insieme dei numeri reali **R**, mostrando in tal modo che **Q** è paradossalmente equipotente a **N**, mentre **R** ha una potenza maggiore di **N** a causa della presenza dei numeri irrazionali (i quali, da soli, risultano più numerosi di tutto **N**).

Lo sviluppo cantoriano di una aritmetica dell'infinito, con tutti i suoi paradossi, e soprattutto la fondazione logico-insiemistica del concetto di numero saranno poi ampiamente discusse nel dibattito fondazionale: in particolare, la teoria degli insiemi sarà la base della fondazione *logicista* della matematica.

f) <u>La nascita della logica matematica</u>

Con *logica matematica* o *logica formale* (di cui ci siamo in parte già occupati nella sezione precedente, riguardante i sistemi formali) si indica quella parte della logica che concepisce le espressioni del pensiero attraverso combinazioni di stringhe di segni e, spogliate queste di ogni significato, riconduce lo studio del pensiero allo studio di tali stringhe e alle leggi che ne regolano le trasformazioni.

Il precursore della logica matematica fu il già citato Leibniz, il quale per primo espresse, senza attuarla concretamente, l'idea di creare un alfabeto universale di segni tale che tutti i possibili pensieri potessero essere espressi tramite stringhe di tali segni. Tuttavia, colui che è considerato il padre della logica formale è George Boole (1815-1864). Con idee del tutto innovative, Boole afferma che la logica è strettamente connessa alla matematica, che essa si occupa dello studio della "forma" dei ragionamenti e non del loro "contenuto" (di qui l'aggettivo *formale*), e che la vera essenza della matematica risiede unicamente nella logica (e non nei classici oggetti aritmetici e geometrici da essa studiati).

Le rivoluzionarie tesi booleane, con la conseguente nascita della moderna logica formale, daranno l'avvio ad un iniziale programma di *logicizzazione dell'aritmetica*, programma che verrà in seguito ulteriormente esteso a tutta la matematica con la filosofia *logicista*.

g) <u>La logicizzazione dell'aritmetica</u>

Con *logicizzazione dell'aritmetica* intendiamo la riformulazione assiomatico-formale del sistema dell'aritmetica classica, avente come oggetto di studio i numeri naturali. Questa riformulazione costituisce, in campo aritmetico, l'analogo di quella formalizzazione hilbertiana della geometria euclidea vista sopra; di conseguenza, anch'essa si scaglia contro Kant e contro il suo porre l'intuizione sensibile spazio-temporale a fondamento delle scienze matematiche. Essa, quindi, rivoluziona la maniera tradizionale di concepire il numero come entità primitiva, meramente intuita e indefinibile.

Il matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) è il primo a dare all'aritmetica una veste assiomatica formale abbastanza rigorosa. Egli, nonostante ricorra ancora all'uso di concetti primitivi indefiniti – come *numero naturale*, *zero* (0) e *successivo di un numero naturale* – tuttavia è innovatore nello scegliere cinque assiomi dai quali derivare tutto il sistema formale dell'aritmetica, che vengono chiamati in suo onore *assiomi di Peano,* e che sono:

1. 0 è un numero naturale;
2. Se x è un numero naturale, allora esiste un altro numero naturale denotato da x' (chiamato *successivo* di x);
3. Non esiste alcun numero naturale x tale che $x' = 0$;
4. Se è $x' = y'$, allora sussiste la relazione $x = y$;
5. Se Q è una proprietà che può valere oppure può non valere per tutti i numeri naturali, e se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:
   a) 0 ha la proprietà Q;
   b) se un qualsiasi numero naturale x ha la proprietà Q, allora ce l'ha anche il successivo x';

   allora tutti i numeri naturali hanno la proprietà Q (principio di induzione).

La logicizzazione dell'aritmetica può a ragione essere considerata un evento ancor più rivoluzionario della formalizzazione della geometria euclidea attuata da Hilbert; infatti, mentre quest'ultimo dà alla geometria *già assiomatizzata* da Euclide una maggiore sistematizzazione formale, tale da eliminare ogni residuo di intuizione, l'opera di formalizzazione dell'aritmetica porta invece, per la prima volta, ad una sua *assiomatizzazione*. Assiomatizzazione che comporta un notevole sforzo, da parte dei matematici, consistente nell'indagare le proprietà dei numeri per estrapolare un numero finito di esse, da porre a fondamento dell'intera teoria.

La logicizzazione dell'aritmetica porta a notevoli progressi per quanto concerne il grado di astrazione delle definizioni di numero, anche grazie all'importante contributo del logico e matematico tedesco Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925). I risultati ottenuti da Frege sono inquadrabili nel già più volte citato *programma logicista di fondazione della matematica*, del quale può essere non a torto considerato, insieme a Bertrand Russell (1872-1970), il massimo esponente.

Il logicismo di Frege costituisce la prima delle tre risposte filosofiche alla crisi dei fondamenti della matematica, che è stata qui descritta nelle sue linee essenziali e senza pretese di esaustività, ma unicamente con l'intento di delineare il contesto storico-culturale con il quale queste stesse filosofie si confrontano criticamente, allo scopo di dare un'unica base certa e sicura al sempre più espanso e multiforme universo matematico. Il logicismo di Frege verrà trattato nel prossimo paragrafo.

2.2. Le tre risposte filosofiche alla crisi dei fondamenti: logicismo, intuizionismo e formalismo

2.2.1. Il logicismo: l'ascesa del programma di Frege…

La filosofia logicista ritiene, come già detto nel paragrafo precedente, di poter trovare nella logica il fondamento ultimo non solo dell'aritmetica (scopo in parte già raggiunto da Peano con la sua assiomatizzazione), ma addirittura dell'intera matematica. La tesi logicista è sostenuta dal tedesco F.L.G. Frege.

Nell'intraprendere il suo programma di indagine dei fondamenti della matematica (la cui necessità è per Frege dovuta alla mancanza di rigore che contraddistingue alcune parti della matematica, come l'analisi), il logicista tedesco parte dall'aritmetica e dunque dalla fondazione rigorosamente logica del concetto di numero; tuttavia, esclude dalla sua analisi filosofica la geometria, che viene intesa, kantianamente, come fondata sull'intuizione (e pertanto non suscettibile di fondazione logica).

Secondo Frege, l'aritmetica è una vera e propria branca della logica; pertanto, le verità aritmetiche sono unicamente delle verità logiche, dimostrate a partire da un insieme finito di verità primitive logiche (le quali, indimostrabili, vengono a noi date attraverso un processo di intuizione intellettuale), facendo uso solo di leggi logiche generali e di definizioni: questo è, in sintesi, il "succo" del programma fregeano, che egli si propone appunto di dimostrare.

La fondazione logica del numero è strettamente coniugata, in Frege, alla teoria degli insiemi (la quale, cosa molto importante, era ai tempi di Frege considerata una branca della logica). Nella teoria degli insiemi, sono in particolare importanti il *principio di Estensionalità* e il *principio di Astrazione*, che ora definiamo e che serviranno per capire gli sviluppi del programma fregeano.

Il *principio di Estensionalità* afferma che, dati un generico insieme A e un generico insieme B, A è uguale a B se e solo se, dato un qualsiasi altro C, C è un elemento di A se e solo se C è un elemento di B. Da questo principio discende la basilare conseguenza che un insieme è interamente determinato dalla totalità dei suoi elementi, perciò esso rileva solo l'*estensione*, ossia la totalità degli oggetti che soddisfano una condizione o proprietà. Una conseguenza di tutto questo è che due proprietà differenti possono dare luogo ad uno stesso insieme, nel caso in cui una di tali proprietà sia goduta da tutti e soli gli elementi che godono dell'altra proprietà.

Il *principio di Astrazione* afferma invece che esiste un insieme y, tale che, per ogni x, x appartiene a y se e solo se x gode di una determinata proprietà (indicata ad esempio con il simbolo □[x]). Dal principio di Astrazione si deduce un importante modo di concepire gli insiemi; in base ad esso, infatti, per una qualsiasi proprietà o condizione dovrebbe intuitivamente esistere l'insieme corrispondente: un insieme non è altro che *l'estensione di una condizione arbitraria*.

Torniamo ora al progetto logicista di Frege, e alla sua fondazione del concetto di numero. Frege vuole ridurre il numero a concetti logici ancora più fondamentali, derivanti dalla teoria degli insiemi; precisamente, vuole definire i numeri in termini di proprietà di, e relazioni tra, insiemi. La fondamentale intuizione di Frege consiste appunto nel considerare i numeri come *proprietà* di insiemi. Ora, se ci si riconduce a quanto poc'anzi affermato a proposito del principio di Astrazione e delle sue conseguenze, si capisce chiaramente che tutto questo equivale a considerare i numeri come *insiemi di insiemi*.

Facendo un passaggio logico in più, e ricollegandosi alle definizioni cantoriane di potenza, cardinalità ed equipotenza, si può arrivare a definire il *numero cardinale* di un insieme qualsiasi come *l'insieme di tutti gli insiemi equipotenti ad esso*. Ciascun numero è dunque caratterizzabile come una proprietà comune che lega tra loro tutti gli insiemi equipotenti.

Questa riconduzione del concetto di numero a quello di insieme, che costituisce una delle più geniali e importanti intuizioni del logicismo di Frege, per la prima volta definisce pertanto il numero (da sempre considerato un ente primitivo e indefinibile) riducendolo al concetto, ancora più astratto, intuitivo e irriducibile ad alcunché di primitivo, di insieme, e dunque, di fatto, ad un concetto puramente logico: la prima parte del progetto logicista può dunque considerarsi conclusa.

La seconda parte del programma fregeano consiste nel ricavare dai concetti insiemistici primitivi (intesi come nozioni logiche) tutta la matematica, attraverso definizioni e inferenze puramente logiche. Il successo della teoria degli insiemi come base per la fondazione del numero fa in effetti pensare a Frege, e in generale ai logicisti, che essa costituisca la chiave di volta per la realizzazione del loro ambizioso intento.

2.2.2. …e il suo crollo. L'antinomia di Russell

Purtroppo però, la realtà dei fatti si rivela essere molto diversa da come i logicisti la immaginano; infatti la teoria degli insiemi, sulla quale Frege aveva fondato logicamente il concetto di numero, paradossalmente ingenera una serie di contraddizioni logiche, che metteranno fine, per quanto concerne Frege stesso, agli intenti fondazionali basati sulla riduzione della matematica alla logica.

La più semplice e nota di queste contraddizioni è conosciuta con il celebre nome di *antinomia di Russell*. Essa viene comunicata dal logico Bertrand Russell a Frege in una lettera del 1902 (anno al quale si fa risalire l'inizio della crisi dei fondamenti, la quale tuttavia trova i suoi antefatti molto più indietro nel tempo, in relazione ai fermenti culturali connessi allo sviluppo delle matematiche di cui si è sopra discusso), e fa riferimento a problemi di carattere logico derivanti dal Principio di Astrazione, il quale sembra garantire che a qualsiasi proprietà o condizione debba corrispondere un insieme.

Seguendo il ragionamento svolto da Russell, suddividiamo tutti gli insiemi possibili in due grandi categorie: quella degli insiemi che non appartengono a se stessi (che vengono detti *normali*) e quella degli insiemi che appartengono a se stessi (detti invece *non normali*). Questa distinzione porta a considerare l'insieme R degli insiemi normali, cioè un insieme contenente tutti gli insiemi non autoappartenentisi. È proprio questo nuovo insieme il responsabile dell'antinomia di Russell. Infatti, in virtù del Principio di Astrazione applicato alla proprietà di non appartenenza a se stessi, deve esistere un insieme y, a cui ogni insieme x appartiene se e solo se x non appartiene a se stesso. Inoltre, per il Principio di Estensionalità, l'insieme y corrispondente a tale condizione è proprio R: di conseguenza si può affermare che un insieme x appartiene a R se e solo se non appartiene a se stesso.

Ci chiediamo ora se R stesso goda o meno della proprietà di non autoappartenenza: per verificare l'una o l'altra eventualità, sostituiamo nella asserzione precedente R al posto di *x*, ottenendo così che "l'insieme R appartiene a R se e solo se non appartiene a se stesso", che è come dire che "l'insieme R appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso". È del tutto evidente che quest'ultimo enunciato è una contraddizione.

I logicisti e Frege scoprono così, loro malgrado, che il Principio di Astrazione non ha una portata così grande da poter essere applicato, come essi credevano, a tutti i tipi di proprietà (infatti alcune di esse, come abbiamo appena visto, possono produrre delle contraddizioni). Pertanto il progetto fregeano di fondare l'aritmetica, e con essa tutta la matematica, sulla logica della teoria degli insiemi fallisce, risultando niente di più che una mera utopia.

2.2.3. L'intuizionismo di Brouwer e i suoi limiti

Dal 1902, con la scoperta dell'antinomia di Russell e con il conseguente crollo della filosofia logicista, si affermano nel dibattito fondazionale numerose scuole filosofiche, le quali tentano di risolvere, in una prospettiva polemicamente antilogicista, i paradossi che minacciano sempre di più le precarie basi su cui si erge la conoscenza matematica. Tra queste, particolarmente importanti e radicali risultano essere l'*intuizionismo* del matematico olandese Jan Luitzen Egbertus Brouwer (1881-1966) e il *formalismo* di David Hilbert (cui ci siamo già più volte riferiti, in particolare descrivendo la sua opera di formalizzazione della geometria euclidea).

L'intuizionismo brouweriano, lungi dal dichiarare il primato della logica nei confronti della matematica, pone invece a fondamento del numero e di tutta la matematica l'intuizione, recuperando così, almeno in parte, la teoria kantiana (infatti pone come primario lo studio dell'aritmetica a scapito della geometria, e si basa sull'intuizione di tempo, abbandonando quella spaziale).

Questo comporta, da parte di Brouwer, un disconoscimento di tutta la fondazione dell'analisi infinitesimale operata da Weierstrass, Dedekind e Cantor, i quali hanno introdotto oggetti e metodi astratti che non possono essere dati dall'intuizione. Di conseguenza Brouwer mette a punto un nuovo programma di fondazione di una "matematica intuizionista", la quale, sulla base dei seguenti due princìpi, pone notevoli restrizioni ai metodi dimostrativi comunemente usati dalla matematica classica:

1. Si considerano "esistenti" solo gli oggetti matematici *costruibili*, cioè che possono essere *costruiti* con un numero finito di passi. Tutti gli altri non hanno senso alcuno, per cui è perfettamente inutile speculare su di essi. Ciò comporta il rifiuto dell'infinito attuale (cioè dell'infinito concettualizzato come esistente di per sé, in contrapposizione all'infinito potenziale, costruito intuitivamente attraverso una serie illimitata di singoli passaggi finiti);
2. Si rifiuta la legge del terzo escluso – cioè la legge logica secondo la quale esistono per ogni enunciato solo i due valori di verità "vero" e "falso", e pertanto, se è vero l'enunciato A, allora sarà falsa la sua negazione ¬A, e viceversa – e, conseguentemente, non si riconosce valido il metodo di dimostrazione indiretta (cioè per assurdo).

Questi principi sono importanti in quanto, lontani dal poter influenzare unicamente il dibattito filosofico, limitano fortemente l'attività matematica dal punto di vista pratico.

Per quanto riguarda invece il ruolo della deduzione nella matematica intuizionista, la dimostrazione concepita da Brouwer è una dimostrazione di tipo assiomatico, dove gli assiomi vengono forniti immediatamente dall'intuizione, e così anche le inferenze deduttive che accompagnano il ragionamento, fino ad arrivare a nuove relazioni non percepite immediatamente.

Brouwer, dopo essersi scagliato contro l'analisi infinitesimale concepita classicamente, elabora inoltre una analisi infinitesimale del tutto rispondente ai principi fondanti l'intuizionismo, raggiungendo così finalmente il suo scopo di costruire una nuova matematica basata sull'intuizione.

Tuttavia, l’intera matematica intuizionista presenta gravi limiti, derivanti in primo luogo dall’assenza, in essa, di molteplici concetti e costruzioni di cui la matematica classica si serve senza troppe titubanze, e con fecondi risultati nell’ambito delle scienze sperimentali (irrimediabilmente preclusi alla matematica brouweriana). Pertanto, anche il programma di fondazione intuizionista, così come in precedenza quello logicista, si risolve in un fallimento.

2.2.4. L’impossibile programma formalista di Hilbert. I teoremi di Gödel e la fine della crisi

In risposta al logicismo di Frege e all’intuizionismo di Brouwer, prende vita, all’interno del pensiero del matematico tedesco David Hilbert (1862-1943), la filosofia *formalista*, di cui è il teorizzatore ed il massimo esponente. Anch’egli è mosso dalla volontà di fondare la certezza della matematica, dopo i paradossi logici derivanti dalla teoria degli insiemi e dopo l’affermarsi in misura sempre maggiore delle tesi intuizioniste di Brouwer, che egli ritiene possibile attraverso la dimostrazione della non-contradditorietà dei sistemi assiomatici formali utilizzati per costruire l’aritmetica (alla quale, come sappiamo, era stata ridotta una buona parte della matematica).

Anche Hilbert, come già Brouwer e Frege prima di lui, dà quindi vita al suo programma, detto appunto *programma di Hilbert*, e articolato nei seguenti punti:

1. Individuare un sistema assiomatico formale molto semplice tale che: a) la sua non contraddittorietà sia dimostrabile direttamente, senza ricorrere alla presunta non contraddittorietà di altri sistemi; b) la sua non contraddittorietà implichi quella di tutti i sistemi assiomatici formali con i quali si può ricostruire tutta la matematica classica;
2. Dimostrare la non contraddittorietà del sistema individuato con metodi di dimostrazione costruttivi, così che tutta la matematica sia al riparo dalle obiezioni degli Intuizionisti.

Di questo programma Hilbert propone una personale soluzione, articolata anch’essa in due punti:

1. Il sistema assiomatico da prendere in esame deve essere in grado di esprimere tutta e sola l'aritmetica degli interi, che è né più né meno di quel che serve per costruire l'intera matematica.
2. La non contraddittorietà deve essere dimostrata con metodi *finitistici* o *finitari*, cioè tali che: a) fanno uso di un numero finito di enti; b) ogni oggetto deve poter essere costruito con un numero finito di passi; c) non è lecito parlare di un oggetto senza mostrare come è stato costruito; d) non è lecito assumere come date collezioni infinite; e) dire che una data proprietà vale per un numero infinito di oggetti, vuol dire che è possibile verificare tale proprietà su di essi, uno per uno.

Il punto 2 della *soluzione di Hilbert* richiama la distinzione fatta appunto da Hilbert tra *matematica finitaria* e *matematica infinitaria*. Con la prima si vuole indicare una parte della matematica fondata esclusivamente sull’intuizione sensibile pura e che non tiene conto degli sfuggevoli metodi astratti di fondazione dell’analisi infinitesimale classica di Dedekind, Weierstrass e Cantor, e dell’infinito attuale (la matematica finitaria ricalca quindi da vicino quella intuizionista di Brouwer). Con la seconda si vuole invece indicare la matematica nel suo complesso.

Per Hilbert e i formalisti, la matematica può essere completamente dedotta da un sistema assiomatico formale; infatti, per Hilbert, la matematica consta unicamente di una arbitraria combinazione di segni di per sé privi di un autonomo significato, le cui regole di combinazione vengono prefissate dagli assiomi del sistema considerato: in quest’ottica, gli assiomi devono garantire, se si vuole che il sistema funzioni, la non-contraddittorietà del sistema stesso. Per dimostrare, dunque, che la matematica è non contraddittoria è sufficiente dimostrare che quel sistema è non contraddittorio, cioè che, applicando agli assiomi e a ogni espressione correttamente formulata nel linguaggio del sistema, le regole di inferenza stabilite, non è possibile giungere a due espressioni che siano l'una la negazione logica dell'altra. La dimostrazione della non-contradditorietà del sistema formale esprimente l’intera matematica (che si riduce, nel programma di Hilbert, alla dimostrazione della non-contraddittorietà del sistema formale esprimente l'aritmetica) deve essere affidata ad una nuova disciplina, detta *metamatematica* o *teoria della dimostrazione* (che costituisce, come già detto nella sezione 1, la metateoria che studia il linguaggio formale in cui è espressa la matematica).

In seguito a questa teorizzazione, Hilbert si rende conto del fatto che la dimostrazione della non-contraddittorietà o coerenza sintattica dell'aritmetica non basta per raggiungere il suo scopo: serve infatti anche una dimostrazione della *completezza sintattica* dell'aritmetica (sempre compito della metamatematica). Per completezza sintattica, come già detto nel paragrafo 1.2.3, s'intende quella proprietà dei sistemi formali tali che, per ogni enunciato A, sia possibile in essi dimostrare o A o la sua negazione ¬A.

È evidente, a proposito della fondazione metamatematica della coerenza e completezza sintattiche del sistema formale dell'aritmetica, che Hilbert auspicava che questa fosse formalizzabile all'interno dello stesso sistema dell'aritmetica, così da realizzare l'ambizioso progetto di autofondazione formalista di tutta la matematica.

Tuttavia, a svegliare bruscamente Hilbert dal suo sogno è il logico Kurt Gödel, il quale nel 1931 dichiara impossibile da realizzare il programma formalista, attraverso i suoi due Teoremi di Incompletezza dell'Aritmetica (di cui si è già ampiamente parlato nella sezione 1 riguardante i sistemi formali, alla quale rimandiamo).

I Teoremi di Incompletezza di Gödel del 1931 chiudono così la stagione formalista, oltre che la cosiddetta "crisi dei fondamenti della matematica", inaugurata nel 1902 dalla scoperta dell'Antinomia di Russell. Pertanto con essi si chiude qui anche la sezione seconda, riguardante la matematica nel dibattito filosofico-culturale del primo Novecento.

3. La matematica: il linguaggio universale delle scienze sperimentali

Nella terza e ultima sezione di cui questa tesina è composta ci occuperemo del fondamentale ruolo svolto dalla matematica come linguaggio universale per la descrizione dei fenomeni naturali, all'interno degli ambiti di competenza delle singole scienze sperimentali. In particolare, verranno analizzati alcuni efficaci modelli matematici in relazione a specifici argomenti, che interessano le discipline della biologia (dinamica delle popolazioni) e della fisica (circuiti RL e radioattività).

3.1. L'importanza dell'analisi infinitesimale nelle applicazioni scientifiche sperimentali

Tra tutti gli innumerevoli settori di cui è costituito il complesso del sapere matematico, sicuramente uno dei più ostici (e perciò entusiasmanti) dal punto di vista teorico e, al tempo stesso, uno dei più fecondi in termini di applicazioni scientifico-sperimentali, è quello dell'Analisi Infinitesimale (che, come abbiamo visto nella seconda sezione, ha dato del filo da torcere ai matematici ottocenteschi che ne cercavano una necessaria fondazione rigorosa).

Si può dire che l'analisi infinitesimale reale si occupa, in buona sostanza, dello studio delle funzioni reali di variabile indipendente reale, delle quali, a partire dalla legge che caratterizza ciascuna di esse, vengono determinati, tra gli altri aspetti: i punti o gli intervalli di definizione (domini delle funzioni); eventuali simmetrie del grafico cartesiano rispetto agli assi coordinati; comportamento in prossimità dei punti di non-definizione e "all'infinito"; intervalli di continuità; punti di discontinuità (e relative specie); intervalli in cui la funzione cresce o decresce; punti nei quali non è possibile quantificare la crescita o la decrescita della funzione (punti di non derivabilità) ; punti le cui ordinate presentano valori massimi o minimi relativamente ad un determinato intervallo considerato (i "punti di massimo" e "di minimo"); concavità della curva grafico della funzione; punti "di flesso", nei quali si registra un cambiamento della concavità della curva (da verso l'alto a verso il basso e viceversa); misura dell'area sottesa alla curva grafico della funzione in un determinato intervallo di valori della variabile indipendente. Da questi dati, ottenuti mediante l'uso di importantissimi operatori (quali limiti, derivate, integrali indefiniti e definiti), si riesce quindi ad evincere tutto quello che caratterizza l'andamento del grafico della funzione studiata. La potenza dell'analisi in ambito strettamente matematico sta, limitatamente a questi aspetti, proprio nella sua incredibile capacità di prevedere, usando gli operatori di cui sopra, tutte le caratteristiche di una funzione senza tracciarne il grafico (che infatti si rivela essere molto spesso il punto di arrivo dello stesso studio di funzione).

Tuttavia, è a livello applicativo che questa branca della matematica mostra la sua notevole utilità; infatti, le relazioni causa-effetto che determinano i fenomeni della natura devono essere esprimibili, secondo il metodo scientifico galileiano, attraverso relazioni matematiche tra le grandezze che concorrono ai fenomeni, ossia attraverso funzioni. Pertanto, studiare funzioni dotate di particolari significati fisici, chimici, biologici etc… permette, in definitiva, di conoscere matematicamente anche le caratteristiche dei rapporti causa-effetto sui quali sono basati tutti i meccanismi della Natura.

Inoltre, i rapporti esistenti tra i concetti di funzione primitiva, funzione derivata e integrale indefinito, permettono di dedurre, a partire da determinate equazioni coinvolgenti la derivata di una funzione (dette *equazioni differenziali*), espressioni matematiche che esplicitano la funzione stessa: questo, come avremo modo di approfondire nel seguito, è molto utile nei casi in cui si voglia determinare l'equazione di una funzione $f(x)$ conoscendone alcune caratteristiche che siano correlate all'operatore derivata.

Per questi motivi, si capisce dunque l'enorme importanza, ai fini della comprensione scientifica del mondo, degli strumenti offerti dall'Analisi Infinitesimale: tra questi, in primo luogo, vi sono i già citati operatori *derivata*, *integrale indefinito*, *integrale definito*, per ognuno dei quali daremo ora brevemente delle definizioni non propriamente rigorose, in quanto volte soprattutto ad enuclearne le funzioni e le relazioni tra essi alle quali rimanderemo nel seguito della trattazione.

Per *derivata di una funzione* $f(x)$ s'intende il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x)$, relativo ad un generico punto di ascissa x appartenente al dominio di $f(x)$ e ad un certo incremento h dato al punto x (tale che anche il punto di ascissa $x + h$ appartenga al dominio della funzione), per h tendente a zero. In simboli si ha: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{h}$, dove i simboli $f'(x)$ e $\frac{df(x)}{dx}$ indicano indifferentemente appunto la derivata (prima) della funzione $f(x)$.

L'importanza della derivata nello studio di funzione e nelle applicazioni scientifiche ad esso connesse, risiede proprio nella sua definizione: infatti, se il rapporto incrementale quantifica una *variazione dei valori* assunti dalla funzione relativamente ad un ben definito intervallo di valori della variabile indipendente, la derivata, facendo tendere a 0 l'ampiezza del suddetto intervallo, è *come se* quantificasse una *variazione punto per punto* dei valori di $f(x)$; proprio per questa sua proprietà, la derivata viene considerata anch'essa una funzione di x, che associa ad ogni x appartenente al dominio della funzione $f(x)$ un determinato valore che quantifica la crescita o la decrescita "puntuale" di $f(x)$. Questa corrispondenza tra la crescita del grafico di $f(x)$ e la sua derivata viene, come vedremo negli esempi successivi, molto utilizzata nelle applicazioni fisiche, biologiche etc… , nelle quali solitamente si analizza una *variazione nel tempo* dei valori di determinate grandezze funzioni del tempo.

Per *integrale indefinito* s'intende invece un operatore che, agendo inversamente alla derivata, associa ad una funzione $f(x)$, detta *funzione integranda*, la totalità delle funzioni *primitive* di $f(x)$ (ossia funzioni che derivate danno $f(x)$). L'integrale indefinito è dunque l'operatore che permette di risalire dalla derivata comune di infinite funzioni alle funzioni stesse, la cui espressione rientra, al variare di C in R, nella forma generale F(x) + C ed è determinata, per ognuna di esse, da un preciso valore di C.

In simboli la definizione di integrale indefinito (indicato col simbolo $\int f(x)dx$) è la seguente:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

L'*integrale definito* (di cui per brevità non diamo qui alcuna definizione rigorosa) è invece un altro operatore, differente dall'integrale indefinito ma ad esso correlato, che presenta due importantissime funzioni. In primo luogo, esso permette il calcolo della misura dell'area del *trapezoide* sotteso alla curva del grafico di una funzione, limitatamente ad un certo intervallo di valori della variabile indipendente (aspetto, questo, molto importante dal punto di vista applicativo, in quanto molto spesso anche all'area del trapezoide corrisponde una particolare grandezza fisica, ad es. il lavoro di una forza o l'energia). In secondo luogo, l'integrale definito, in virtù della stretta relazione tra funzione integrale (quest'ultima derivante dal concetto di integrale definito) e integrale indefinito discendente dal *teorema fondamentale del calcolo integrale*, consente di risolvere le già citate *equazioni differenziali* "sostituendo", dunque, la funzione dell'integrale indefinito come operatore inverso della derivata (in realtà non vi è vera sostituzione, in quanto l'integrale indefinito è comunque applicato nel calcolo di un integrale definito). Come vedremo, la risoluzione delle equazioni differenziali mediante gli integrali definiti si rivela molto utile ed importante in ambiti scientifici extramatematici, nei quali è necessario risalire a *particolari* primitive mediante integrazioni in specifici intervalli, dotati di un loro proprio significato all'interno delle varie scienze.

Il simbolo dell'integrale definito di una funzione *f*(*x*) relativo ad un intervallo di estremi a e b, con $b>a$, è $\int_a^b f(x)dx$.

Dopo aver descritto in via teorica l'importanza dell'Analisi Infinitesimale nelle scienze sperimentali, passiamo ora in rassegna alcuni esempi, presi dagli ambiti della Biologia e della Fisica, nei quali essa è applicata con successo per descrivere i fenomeni naturali in termini di funzioni.

3.2. Il linguaggio matematico nella biologia: modello esponenziale e logistico di crescita delle popolazioni

La biologia, cioè la scienza che studia la vita in tutte le sue forme e complesse organizzazioni, sembra essere una scienza in cui il momento osservativo e descrittivo dei fenomeni prevale su quello di "traduzione matematica" dei fenomeni osservati; non si può infatti sperare che i misteriosi e meravigliosi meccanismi che regolano il mondo dei viventi siano esprimibili e spiegabili attraverso qualche più o meno semplice formula matematica (come invece accade in fisica, dove l'analisi dei fenomeni che coinvolgono i corpi studiati si accompagna sempre ad una o più formule che li descrivono, attraverso l'uso di operatori più o meno complessi). Tuttavia, a dispetto di questa tendenza, la matematica offre comunque un valido strumento alla biologia per l'analisi di sistemi biologici complessi (il cui comportamento e la cui evoluzione nel tempo dipendono cioè da un elevato numero di parametri), attraverso l'iniziale sviluppo di modelli ideali semplificati, i quali, in una fase successiva, vengono poi modificati e resi più rispondenti alla realtà, mediante la graduale aggiunta di altre variabili (le quali rispecchiano condizioni ambientali prima non considerate).

A questo proposito, riteniamo utile ed interessante esemplificare quanto detto riferendoci ad uno specifico ambito di studio della biologia, la *dinamica delle popolazioni* (con i suoi modelli di crescita *esponenziale* e *logistico*).

Per *popolazione* s'intende, in ambito biologico, un insieme di individui tutti appartenenti alla medesima specie, che vivono in un'area determinata e che utilizzano le stesse risorse. La *dinamica di popolazioni* si occupa dello studio dell'evoluzione di una popolazione, in termini di variazione delle dimensioni della stessa, cioè in termini di variazione del numero di individui ivi presenti. Com'è ovvio, quando si parla di variazione del numero di individui presenti in una popolazione, si allude alla *crescita* della popolazione stessa. Si può dunque a ragione affermare che l'analisi della crescita delle popolazioni sia, in definitiva, uno dei principali oggetti di studio della dinamica di popolazioni.

I più semplici modelli matematici impiegati nella dinamica di popolazioni sono, come già accennato, essenzialmente due: il modello di *crescita esponenziale* e il modello di *crescita logistica*. Analizziamoli brevemente.

3.2.1. Il modello di crescita esponenziale delle popolazioni

Il modello di crescita esponenziale è un modello matematico che descrive molto bene la crescita di una popolazione in assenza dei cosiddetti *fattori limitanti*. I fattori limitanti sono costituiti dall'insieme di tutti i fattori, biotici (cioè di natura vivente) e abiotici (cioè di natura non vivente), presenti nell'area nella quale la popolazione vive, che limitano la crescita della popolazione stessa. Esempi di fattori limitanti sono dati da: disponibilità limitata di cibo, acqua e altre risorse, presenza di predatori, limitati siti per la nidificazione, disponibilità di luce, temperatura, salinità etc.…

I fattori limitanti scongiurano l'eventualità di una crescita incontrollata delle popolazioni; pertanto, il modello di crescita esponenziale, dal momento che è riferito a condizioni ambientali ideali e non limitanti per l'appunto l'aumento del numero di individui di una popolazione, si configura come una descrizione matematica di una utopica (e, in relazione a quanto prima affermato, anche concettualmente semplificata) crescita inarrestata.

Per definire dal punto di vista matematico la legge della crescita esponenziale, è necessario dapprima definire matematicamente il concetto di crescita. La crescita, come si è già accennato, è correlata con una *variazione nel tempo* del numero di individui, che indica la differenza tra il numero di individui nell'estremo finale e quello nell'estremo iniziale dell'intervallo di tempo: come tale dunque, è evidente che il numero di individui della popolazione è una *funzione* del tempo t, funzione che indicheremo con il simbolo $N(t)$.

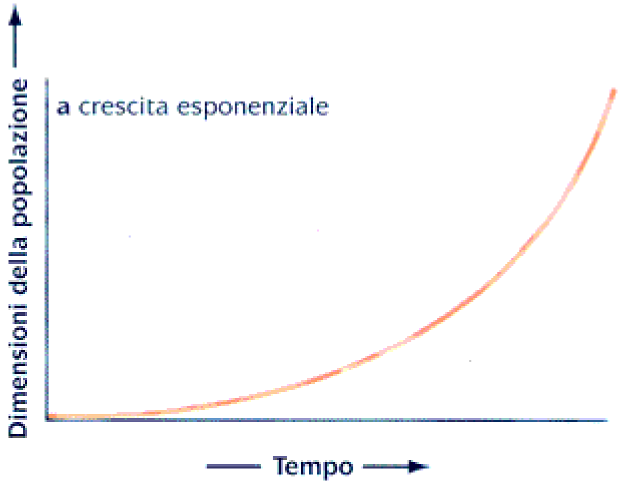
Abbiamo già visto nel paragrafo 3.1 che quando si ha a che fare con una variazione di una funzione $f(x)$ in un intervallo di valori della variabile indipendente x, viene introdotto il concetto di derivata; pertanto, poiché la crescita di una popolazione è una variazione del numero di individui $N(t)$ nel tempo, essa può essere pensata come la derivata $\frac{dN(t)}{dt}$ della funzione $N(t)$, derivata che risulta essere essa stessa una funzione del tempo t.

Inoltre, dato che si può supporre con buona approssimazione che ogni individuo in generale faccia nascere r nuovi individui, il tasso di crescita (indicato con il simbolo G) della popolazione ad un certo istante di tempo t (in cui sono presenti esattamente $N(t)$ individui) sarà direttamente proporzionale a $N(t)$ secondo il fattore costante r. Pertanto si ha, in simboli: $G = \frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t)$.

Ora, poiché l'obiettivo della nostra analisi è dedurre la legge della crescita esponenziale (che dovrà definire il numero $N(t)$ di individui in funzione del tempo t e del numero N_0 di individui della popolazione all'istante iniziale $t_0 = 0$ s), risolviamo l'equazione differenziale $\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t)$ per determinare $N(t)$ a partire dalla sua derivata. Applicando il 2° principio di equivalenza delle equazioni otteniamo: $\frac{dN(t)}{N(t)} = r \cdot dt$. Da qui, dato che interessa conoscere la legge esponenziale in un intervallo di valori del tempo compreso tra l'istante iniziale $t_0 = 0$ s e un istante generico t, al quale corrisponde un intervallo di valori del numero di individui compreso tra il numero di individui iniziali N_0 e un numero di individui generico N , integriamo dunque, all'interno dei suddetti intervalli, i due membri della precedente equazione in questo modo: $\int_{N_0}^{N} \frac{dN(t)}{N(t)} = \int_0^t r \cdot dt$.

Dall'integrazione effettuata secondo le note regole otteniamo: $\ln N(t) - \ln N_0 = rt - 0 = rt$ da cui: $\ln \frac{N(t)}{N_0} = rt \Rightarrow \frac{N(t)}{N_0} = e^{rt} \Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$.

L'ultima equazione trovata definisce la funzione *N(t)* della crescita esponenziale, così chiamata in quanto il numero di individui è una funzione del tempo t molto simile ad una funzione esponenziale generica y= a^x.



A proposito della legge definente la funzione $N(t)$ (la cui tipica rappresentazione grafica "a J" è qui sopra riportata) è da notare, oltre alla presenza della *costante di Nepero e*=2,718281828…. (peraltro presente altresì in moltissime leggi fisiche dedotte attraverso l'Analisi, a testimonianza dell'universalità e dell'unicità del linguaggio matematico usato per descrivere fenomeni che sembrano a prima vista non avere nulla in comune), anche il fatto che essa mette in relazione tra loro, in maniera logicamente e scientificamente corretta, tutti i parametri di cui si è tenuto conto fin dall'inizio della nostra analisi; infatti, come è anche intuitivamente evidente, il numero di individui di una popolazione *N(t)* ad un certo istante *t* aumenta all'aumentare della quantità di individui N_0 già presenti all'istante iniziale, nonché all'aumentare del tempo *t* trascorso e del fattore *r* (il quale, detto tasso intrinseco di accrescimento, varia al variare della specie considerata, ed esprime la capacità innata del singolo organismo di riprodursi: il suo valore è tanto maggiore quanto minore è il tempo che intercorre tra due generazioni successive).

Di conseguenza, si può affermare che il modello matematico di crescita esponenziale ora dedotto è assolutamente adatto a descrivere la dinamica di una popolazione in condizioni ambientali semplificate, non soggette a fattori limitanti.

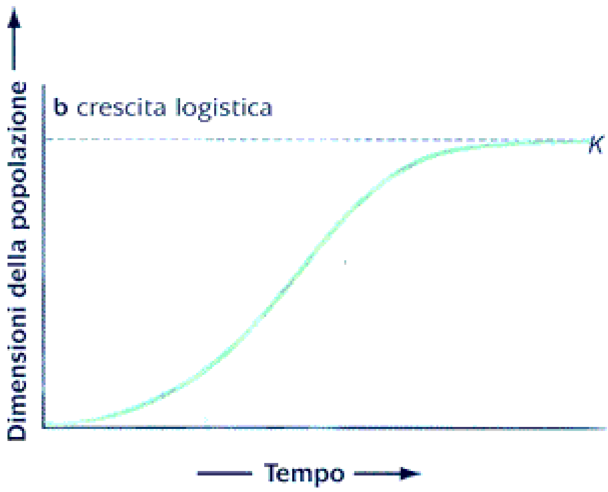
3.2.2. Il modello di crescita logistica delle popolazioni

In realtà, come già accennato nella parte iniziale di questo paragrafo, i fattori limitanti la crescita di una popolazione sono sempre presenti: in ogni ambiente naturale, infatti, le risorse (cibo, spazi etc…) sono disponibili in quantità limitata e atta, quindi, a sostentare solo un certo numero di individui. Il numero massimo di individui che un dato ambiente naturale può sostenere, e il cui valore tiene conto dell'insieme di tutti i fattori limitanti, viene denominato *capacità portante* (indicata con la lettera *K*).

Tenendo conto di questo ulteriore parametro, l'equazione che definisce in forma differenziale il tasso di crescita *logistica* G diventa la seguente: $G = \frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) \cdot \left(\frac{K - N(t)}{K} \right)$.

Questa equazione differenziale (sulla cui risoluzione e sulla cui funzione soluzione non ci soffermeremo per la loro complessità), dopo essere stata risolta, dà come soluzione ancora una funzione $N(t)$ che evidentemente dovrà dipendere, analogamente alla funzione della crescita esponenziale, dall'istante di tempo t considerato, dal numero di individui inizialmente presenti N_0 e dal tasso intrinseco di accrescimento r relativo alla specie cui appartiene la popolazione presa in esame, nonché dal nuovo fattore K (capacità portante) non presente nella legge esponenziale.

Anche senza analizzare in dettaglio l'espressione matematica della funzione $N(t)$, possiamo tuttavia, in virtù della corrispondenza tra il grafico di una funzione e la sua derivata, dedurne alcune importanti proprietà analizzando l'equazione che definisce il tasso di crescita logistica; infatti, prendendo in esame proprio questa equazione, si può facilmente notare come, per valori molto piccoli di $N(t)$ e vicini al numero di individui iniziale N_0 (quindi, equivalentemente, per valori di t tendenti a zero), il rapporto $\frac{K - N(t)}{K}$ può essere approssimato a 1 dal momento che si suppone che K sia molto maggiore di N_0 e che dunque quest'ultimo sia trascurabile rispetto a K; pertanto, per valori di t molto prossimi a 0 il tasso di crescita logistica risulta essere uguale al tasso di crescita esponenziale e conseguentemente la curva descritta dalla funzione logistica $N(t)$ sarà approssimabile dalla curva a J della crescita esponenziale. In seguito, all'aumentare di t e di $N(t)$, il rapporto $\frac{K - N(t)}{K}$ decresce in maniera abbastanza rapida, a causa della presenza in esso del numeratore $K - N(t)$ in progressiva diminuzione e del denominatore costante K numericamente molto elevato; perciò con esso diminuisce progressivamente anche il tasso di crescita logistica (ad eccezione di una fase intermedia in cui il numero di individui $N(t)$, non essendo né troppo piccolo da rendere ininfluente nell'equazione di G il fattore $N(t)$ stesso, né troppo grande da far decrescere in ampia misura il fattore $\frac{K - N(t)}{K}$, fa sì che, per un breve tratto, G sia abbastanza elevato e superiore ai valori riscontrati nella fase iniziale) , il quale pertanto si allontana sempre più dai valori tipici della crescita esponenziale. Si giunge così ad una situazione limite finale, nella quale, per $N(t)$ tendente al valore K della capacità portante, il valore di G tende ad annullarsi, e pertanto il numero di individui, non subendo più alcun aumento, tende a stabilizzarsi in corrispondenza del valore K.



Si noti come la curva di crescita logistica grafico della funzione $N(t)$, qui sopra riportata e detta anche *curva sigmoide* a causa della sua tipica forma a S, risponde bene a tutte le caratteristiche evinte indirettamente dallo studio della sua derivata. È da notare inoltre, ancora una volta, la perfetta corrispondenza tra comportamento matematico della funzione $N(t)$ e significato biologico dei termini in essa presenti; infatti, la stabilizzazione della funzione dopo il raggiungimento della capacità portante K traduce in termini matematici l'effetto dei fattori limitanti sulla popolazione, che non potrà quindi più crescere in quanto le risorse limitate non possono permettere la sopravvivenza di un numero di individui maggiore di K.

In conclusione, si può dunque affermare che il modello di crescita logistica delle popolazioni descrive anch'esso in maniera appropriata, la dinamica di una popolazione soggetta a fattori limitanti, presenti nell'ambiente in cui vive e che ne ostacolano la crescita incontrollata.

3.3. Il linguaggio matematico nella Fisica: analisi dei circuiti RL e del decadimento radioattivo

Se lo studio dei fenomeni biologici, pur non avvalendosi – almeno per quanto ne so − in larga misura di strumenti matematici complessi ed astratti come quelli dell'Analisi, dimostra tuttavia (come si è potuto capire nei precedenti paragrafi) di trovare un valido ausilio nell'utilizzo di derivate e integrali, questo risulta ancora più evidente quando si va ad esaminare il ruolo fondamentale del linguaggio matematico in quella che, secondo la mia modesta opinione personale, costituisce la scienza sperimentale più "matematizzata": vale a dire la Fisica.

Nei successivi paragrafi analizzeremo pertanto da un punto di vista matematico le dinamiche di alcuni fenomeni fisici, come ad esempio quelli elettromagnetici relativi ai *circuiti RL*, e quello riguardante il *decadimento naturale delle sostanze radioattive*.

3.3.1. I circuiti RL: extracorrenti di chiusura e di apertura

Il *circuito RL* è un tipo di circuito elettrico costituito da un interruttore I (che apre o chiude il circuito, permettendo o interrompendo così il passaggio di corrente in esso), da una resistenza R (caratteristica del circuito che indica la resistenza opposta dal conduttore nei confronti del transito degli elettroni), da un'induttanza L (anch'essa una caratteristica del circuito, che esprime la tendenza del circuito stesso a generare, in condizioni di intensità di corrente variabile nel tempo, una *f.e.m.* e una *corrente autoindotta* tali da opporsi alla variazione dell'intensità di corrente stessa) e alimentato da un generatore erogante una f.e.m. costante f_g.

Nel caso di un circuito nel quale sia assente l'induttore, alla chiusura del circuito si produce *istantaneamente* una corrente di intensità $i = \dfrac{f_g}{R}$ in virtù della prima legge di Ohm; questa corrente si mantiene in seguito costante fino al momento dell'apertura del circuito, nel quale, sempre *istantaneamente*, l'intensità di corrente si riduce a zero.

La presenza dell'induttanza, con il suo tipico fenomeno di *autoinduzione elettromagnetica*, influisce non poco sui valori dell'intensità di corrente poc'anzi determinati, soprattutto per quanto riguarda gli istanti immediatamente successivi alla chiusura e all'apertura del circuito RL.

Infatti, prendendo in esame i momenti successivi alla chiusura del circuito, la corrente deve passare dal valore i=0 A al valore di regime $i = \dfrac{f_g}{R}$; in questi istanti, nei quali la corrente del circuito varia, si produce una variazione nel tempo del flusso $\Phi(\vec{B})$ del campo magnetico autoconcatenato con il circuito, la quale si traduce quindi nella già accennata *f.e.m autoindotta*, esplicitata matematicamente attraverso la legge di Faraday-Neumann-Lenz: $f.e.m = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ (si noti, ancora una volta, l'efficace utilizzo dell'operatore derivata per indicare, come al solito, variazioni infinitesime di determinate grandezze nel tempo). Il segno – della legge di Faraday-Neumann-Lenz costituisce la traduzione, nell'astratta lingua matematica, della concreta opposizione della forza elettromotrice autoindotta nei confronti della variazione nel tempo $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ del flusso del campo magnetico autoconcatenato col circuito. Data, inoltre, la corrispondenza tra variazione del flusso autoconcatenato e variazione dell'intensità di corrente che percorre il circuito, espressa dalla relazione $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = L\frac{di}{dt}$ (dalla quale risulta evidente il ruolo dell'induttanza L all'interno del fenomeno di autoinduzione), la f.e.m autoindotta può anche venire espressa come: $f.e.m = -L\frac{di}{dt}$. Da questa equazione si rende dunque chiara la funzione dell'induttanza, che ostacola, dopo la chiusura del circuito RL, il raggiungimento dell'intensità di regime.

Dopo avere esplicato il ruolo e gli effetti dell'elemento induttore nel circuito RL, vediamo di analizzare, con i noti strumenti dell'Analisi, l'andamento dell'intensità di corrente in funzione del tempo *t* successivo alla chiusura del circuito.

Sappiamo dalla prima legge di Ohm che la differenza di potenziale relativa ad un circuito è pari al prodotto tra la resistenza R esistente nel circuito e l'intensità *i* di corrente che percorre il circuito; nel nostro caso, la differenza di potenziale relativa al circuito RL è data dalla somma algebrica tra la forza elettromotrice costante erogata dal generatore e la forza elettromotrice autoindotta per effetto della presenza dell'induttore L. Perciò si può costruire la seguente equazione differenziale:

$$f_g - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Ora, con l'ausilio del calcolo integrale, risolveremo questa equazione, allo scopo di determinare l'espressione matematica della funzione $i(t)$.

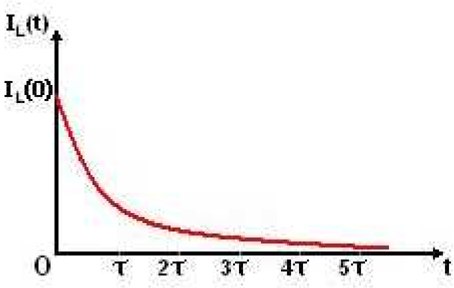
Sfruttando i principi di equivalenza delle equazioni, dall'equazione originaria otteniamo: $L\frac{di}{dt} = f_g - Ri$, da cui si ottiene $\frac{di}{f_g - Ri} = \frac{1}{L}dt$. Con un artificio, dato che f_g e R sono due costanti, l'incremento infinitesimo *di* può essere equivalentemente scritto come $-\frac{d(f_g - Ri)}{R}$. Quindi si ha: $-\frac{1}{R}\frac{d(f_g - Ri)}{f_g - Ri} = \frac{1}{L}dt$, da cui si arriva all'espressione $\frac{d(f_g - Ri)}{f_g - Ri} = -\frac{R}{L}dt$.

Da qui integriamo indefinitamente i due membri dell'equazione: $\int\frac{d(f_g - Ri)}{f_g - Ri} = \int -\frac{R}{L}dt$, ottenendo come risultato l'espressione $\ln(f_g - Ri) = -\frac{R}{L}t + C$. Utilizzando poi le proprietà delle potenze, l'identità $e^{\ln y} = y$ e ponendo $e^C = k$, l'ultima espressione può essere riscritta nella forma seguente: $f_g - Ri = ke^{-\frac{R}{L}t}$, da cui, risolvendo rispetto a *i*, segue che $i = \frac{f_g}{R} - \frac{k}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$. Per determinare il valore del parametro *k* riferito al caso che stiamo esaminando, assumiamo come istante iniziale $t_0 = 0$ s l'istante di chiusura del circuito RL; ovviamente in questo istante la corrente avrà un'intensità $i(t_0)$ nulla, pertanto, sostituendo questi valori nell'ultima espressione otteniamo: $0 = \frac{f_g}{R} - \frac{k}{R}$, da cui si ricava che $k = f_g$ e che quindi l'intensità di corrente in funzione del tempo risulta essere $i(t)=\frac{f_g}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Questa relazione matematica può anche essere scritta come $i(t)=\frac{f_g}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, con la sostituzione $\tau=\frac{L}{R}$, dove τ è una costante propria del circuito e avente le dimensioni di un tempo, denominata *costante di tempo* del circuito.

Raggiunto l'obiettivo di determinare l'espressione matematica dell'intensità di corrente totale in funzione del tempo, soffermiamoci ad analizzarne il significato fisico.

Osserviamo che l'espressione $i(t)$ è costituita dalla differenza tra l'intensità di corrente di regime $\frac{f_g}{R}$ e l'intensità di corrente $\frac{f_g}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$, che costituisce proprio la corrente generata dalla f.e.m autoindotta a causa della presenza dell'elemento induttore L e che viene detta *extracorrente di chiusura* del circuito. Precisiamo che l'espressione matematica dell'extracorrente di chiusura corrisponde perfettamente a quanto detto all'inizio del paragrafo a proposito dei vari elementi del circuito RL; analizzandola attentamente, si nota che il valore dell'extracorrente aumenta all'aumentare della forza elettromotrice erogata dal generatore (infatti con essa aumenta anche il valore dell'intensità di corrente di regime e conseguentemente aumenta anche la f.e.m autoindotta che si oppone alla variazione di corrente stessa), nonché, ovviamente, all'aumentare del valore del coefficiente di autoinduzione L dell'elemento induttore (che è la causa stessa dell'extracorrente di chiusura). L'intensità dell'extracorrente di chiusura diminuisce invece all'aumentare del valore della resistenza R (che per definizione si oppone al passaggio di ogni tipo di corrente nel circuito) e all'aumentare del tempo t; infatti, per tempi uguali o superiori a tre o quattro volte la costante di tempo τ del circuito, il contributo dato dall'extracorrente di chiusura diminuisce in misura tale da poter essere considerato trascurabile rispetto all'intensità della corrente di regime, la quale rappresenta pertanto il valore finalmente raggiunto dalla corrente $i(t)$.

L'andamento decrescente dell'extracorrente di chiusura all'aumentare del tempo è visualizzabile nel sottostante grafico (dove con $I_L(t)$ è indicata l'intensità dell'extracorrente e dove l'unità di misura del tempo è la costante di tempo τ).



Il valore $\frac{f_g}{R}$ raggiunto da $i(t)$ al termine della fase immediatamente successiva alla chiusura del circuito (nella quale, come abbiamo visto, l'extracorrente di chiusura contribuisce in maniera non trascurabile a rendere per pochi istanti di tempo lontana la corrente $i(t)$ dall'intensità di regime) si mantiene costante negli istanti successivi, fino alla apertura del circuito, momento nel quale la corrente totale inizia a decrescere per poi annullarsi. Analogamente a quanto detto a proposito della chiusura del circuito, questa decrescita non è *istantanea*, a causa della presenza dell'elemento induttore L che ostacola la nuova variazione dell'intensità di corrente; l'elemento induttore L produce infatti per autoinduzione una f.e.m, la quale è responsabile della generazione di una nuova corrente indotta, che viene denominata *extracorrente di apertura* del circuito e che con la sua presenza si oppone all'annullamento dell'intensità di corrente totale in transito nel circuito.

L'espressione matematica dell'extracorrente di apertura può essere determinata, analogamente alla precedente extracorrente di chiusura, a partire dalla stessa equazione differenziale prima utilizzata: $f_g - L\frac{di}{dt} = Ri$, con la differenza che, essendo ora il circuito aperto, il contributo dato dal generatore in termini di forza elettromotrice è nullo, e pertanto, l'equazione può essere riscritta come $-L\frac{di}{dt} = Ri$, da cui si ottiene $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$. Da qui, integrando entrambi i membri si ha: $\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L}dt$, cioè: $\ln i = -\frac{R}{L}t + C$. Da qui, eseguendo ora passaggi matematici analoghi a quelli effettuati per la determinazione dell'espressione dell'extracorrente di chiusura, si ottiene la seguente espressione: $i = ke^{-\frac{R}{L}t}$, dove si è posto $k = e^C$. Per determinare ora l'effettivo valore assunto da k nel caso che stiamo analizzando, assumiamo come istante di tempo iniziale $t_0 = 0$ s quello di apertura del circuito, in corrispondenza del quale l'intensità di corrente presente nel circuito ha ancora il valore $\frac{f_g}{R}$ dell'intensità di corrente di regime. Imponendo dunque che l'espressione poc'anzi ottenuta soddisfi queste condizioni, si trova facilmente che è $k = \frac{f_g}{R}$ e che, quindi, sostituendo questo valore di k, l'espressione dell'extracorrente di apertura del circuito diventa: $i = \frac{f_g}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$. Come si può facilmente notare, quest'espressione è la stessa di quella definente matematicamente l'extracorrente di chiusura, e pertanto le considerazioni fatte sui fattori che determinano un aumento o una diminuzione di quest'ultima valgono parimenti per l'extracorrente di apertura (inoltre, l'extracorrente di apertura presenta ovviamente un grafico esattamente identico a quello, sopra riportato, dell'extracorrente di chiusura). Proprio in virtù di queste stesse considerazioni matematiche possiamo derivare un'informazione sul comportamento di questa corrente; essa infatti, analogamente all'extracorrente di chiusura, si esaurisce dopo pochi istanti di tempo (con t pari a tre o quattro volte la costante di tempo del circuito), e con essa si annulla ovviamente anche l'intensità totale di corrente che fluisce nel circuito aperto.

Da quanto detto nel corso di questo paragrafo, si può dunque affermare che l'analisi matematica effettuata descrive ed evidenzia in maniera perfetta tutte le principali caratteristiche del fenomeno di autoinduzione elettromagnetica, i cui effetti macroscopici (extracorrenti di chiusura e di apertura del circuito RL) risultano limitati, come si è visto, ai brevissimi istanti di tempo nei quali si produce una variazione di corrente e del flusso del campo magnetico autoconcatenato con il circuito RL.

Infine, concludiamo questo paragrafo sui circuiti RL facendo notare la presenza, nelle leggi matematiche che definiscono le extracorrenti di chiusura e apertura, del *numero di Nepero e* (già presente, come abbiamo visto, anche nella legge che, in Biologia, interpreta matematicamente la crescita esponenziale delle popolazioni).

3.3.2. La legge del decadimento radioattivo

L'ultimo fenomeno di cui analizziamo quantitativamente le caratteristiche, al fine di ricavare, sempre attraverso l'Analisi, una legge matematica che le descriva e le sintetizzi efficacemente, è il cosiddetto *decadimento radioattivo*.

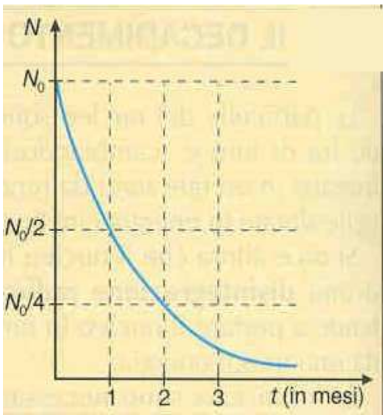
Il *decadimento radioattivo* è un insieme di processi attraverso i quali un nucleo atomico instabile, avente solitamente numero atomico Z e di massa A molto elevati, emette particelle subatomiche per raggiungere uno stato di stabilità. Relativamente a questo fenomeno, può essere dedotta matematicamente una legge, detta appunto *legge del decadimento radioattivo*, la quale indica, in funzione del tempo t e a partire da un certo numero iniziale N_0 di nuclei atomici di un elemento radioattivo, il numero N di nuclei che non sono ancora andati incontro al decadimento: l'obiettivo che ci prefiggiamo è appunto la determinazione di questa stessa legge. Precisiamo tuttavia che, a differenza delle leggi deterministiche relative ai circuiti RL, questa legge si configura come una legge di tipo probabilistico; infatti, in base ai principi della meccanica quantistica, il decadimento spontaneo di un nucleo è un processo del tutto casuale, pertanto è impossibile determinare con assoluta precisione l'istante in cui il fenomeno si verifica. Tuttavia, attraverso la legge che ora andremo a ricavare, è comunque possibile predire la probabilità che un certo numero di atomi di una data specie chimica decada radioattivamente in un ben definito intervallo di tempo.

Consideriamo, quindi, un campione radioattivo costituito da un numero N_0 molto grande di atomi. Ovviamente, il decadimento di una certa quantità di atomi provoca una decrescita, e quindi una variazione nel tempo, del numero di atomi ancora non soggetti al decadimento stesso; questa decrescita è inoltre tanto più consistente quanto maggiore è il numero N di atomi presenti all'inizio dell'intervallo di tempo preso in esame. Per questo motivo, essa è direttamente proporzionale a N secondo una costante di proporzionalità λ la quale viene denominata *costante di decadimento* o *di disintegrazione*, ed esprime, assumendo diversi valori a seconda dell'elemento radioattivo considerato, la peculiare tendenza dei nuclei dell'elemento stesso a decadere spontaneamente.

Dato inoltre che, come già osservato in precedenza, ogni variazione nel tempo di una certa grandezza y funzione del tempo t può venire espressa matematicamente come la derivata prima $\frac{dy}{dt}$, la relazione di cui si è sopra discusso può essere sintetizzata dalla seguente equazione differenziale: $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$, nella quale il segno − esprime matematicamente l'andamento decrescente nel tempo della funzione $N(t)$.

Risolviamo l'equazione, dapprima riscrivendola nella forma $\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$. Ora, dal momento che il nostro scopo è quello di trovare una legge matematica che esprima l'andamento della funzione $N(t)$ in un intervallo di tempo che va dall'istante iniziale $t_0 = 0$ s (coincidente con l'inizio del decadimento) ad un istante di tempo generico t − ai quali corrispondono rispettivamente un numero di atomi non ancora decaduti pari a N_0 (numero di atomi inizialmente presenti nel campione) e a N (numero di atomi presenti all'istante generico t) −, per eliminare i due differenziali dN e dt integriamo definitamente i due membri dell'equazione rispettivamente nell'intervallo che va da N_0 a N e in quello che va da 0 a t, in questo modo: $\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_{0}^{t} dt$. Da qui si ottiene: $\ln N - \ln N_0 = -\lambda \cdot t$, da cui: $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda \cdot t$, cioè, utilizzando la nota proprietà secondo cui $e^{\ln y} = y$: $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$, e quindi: $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Quest'ultima relazione esprime proprio la legge del decadimento radioattivo, la quale mostra che, partendo da N_0 atomi di un elemento radioattivo con costante di disintegrazione λ, il numero N di atomi non ancora decaduti decresce esponenzialmente all'aumentare del tempo t (l'andamento di $N(t)$ si può ben vedere dal grafico riportato qui sotto, dove il tempo t è stato espresso in mesi, a causa della lunga durata dei processi di decadimento naturale).



A partire da questa legge si possono definire molteplici grandezze che esplicitano determinate caratteristiche del decadimento radioattivo dei nuclei atomici di un dato elemento. Una di esse è ad esempio il cosiddetto *periodo di dimezzamento* T, definito come l'intervallo di tempo dopo il quale la metà degli atomi originari è decaduta e pertanto il numero degli atomi ancora presenti è pari a $\frac{N_0}{2}$. Ponendo dunque $N = N_0/2$ e t = T nella legge del decadimento radioattivo e risolvendo rispetto a T, si ottiene che il valore di T è peculiare di ogni singola specie chimica degli atomi che decadono, in quanto dipendente dalla costante di disintegrazione λ secondo la relazione: $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Notiamo che, al solito, la relazione di inversa proporzionalità tra T e λ è coerente con quanto detto a proposito di T e □ in quanto più è elevata la tendenza di un dato numero di atomi di un certo elemento a decadere, minore sarà, almeno in termini stocastici, il periodo di dimezzamento riferito a quello stesso elemento.

Concludiamo il discorso sul decadimento radioattivo (e con esso tutta la terza sezione sul ruolo della matematica all'interno delle scienze sperimentali) con una notevole considerazione, relativa a tutte le leggi matematiche fisiche e biologiche ricavate sin qui: vale a dire il fatto che *sia la legge che definisce in funzione del tempo il numero di individui di una popolazione in crescita esponenziale, sia la legge che esplicita nel tempo l'intensità delle extracorrenti di chiusura e di apertura di un circuito RL, sia la legge del decadimento radioattivo sono tutte e tre espresse dalla medesima relazione matematica generale* $y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$*, dove* y_0 *indica sempre il valore della funzione y(t) nell'istante iniziale* t_0= 0 *s nel quale ha inizio il fenomeno analizzato, e k rappresenta sempre una costante denotante una caratteristica intrinseca ai corpi e ai sistemi che partecipano al fenomeno preso in esame (dal cui segno, positivo o negativo, discende il carattere crescente a +∞ o decrescente asintoticamente a zero della funzione y(t) al tendere di t a +∞).*

Prova di questa perfetta corrispondenza è anche la similarità, a meno del significato fisico, dei grafici esprimenti l'andamento in funzione del tempo delle extracorrenti *i* di apertura e chiusura e del numero *N* di atomi non ancora decaduti.

Notiamo inoltre, ancora una volta, la costante presenza del *numero di Nepero e* in tutte le suddette leggi; presenza che, seppure sbalorditiva (la definizione del numero irrazionale *e* come limite notevole della funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ per x tendente a ± ∞ sembra infatti farlo appartenere più al trascendente mondo matematico che all'immanente mondo naturale) , può essere agevolmente spiegata se viene riconosciuta la forma $\frac{dx}{x}$ in tutte le equazioni differenziali che abbiamo risolto per ricavare le tre leggi; quest'ultima rappresenta infatti, per le note proprietà di derivate ed integrali, un'espressione notevolmente integrabile in $\ln |x| + C$ (dove *ln* è appunto la funzione logaritmo avente per base il numero di Nepero).

Queste interessanti considerazioni suscitano quindi tre riflessioni molto importanti, con cui termina la terza e ultima sezione di questa tesina:

1. la matematica, e in particolare quella parte della matematica che è l'Analisi, riesce a descrivere e a predire con inaudita precisione tutte le caratteristiche dell'evolversi nel tempo dei sistemi naturali studiati dalle varie scienze sperimentali;
2. la matematica si rivela, a dispetto delle apparenze, incredibilmente utile per la descrizione del mondo fisico anche nelle sue parti più astratte e lontane, almeno a prima vista, dalla realtà;
3. la matematica, configurandosi come linguaggio universale delle scienze sperimentali, riesce, applicando i medesimi strumenti all'analisi di fenomeni apparentemente distanti tra loro, a far cogliere allo scienziato la legge comune che lega tra loro i suddetti fenomeni, aiutandolo così a seguire la strada ideale, mai percorribile fino in fondo, che porta l'uomo ad una conoscenza semplice (in termini di quantità di informazioni e strumenti da utilizzare), coerente ed onnicomprensiva dei meccanismi della Natura.