

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).

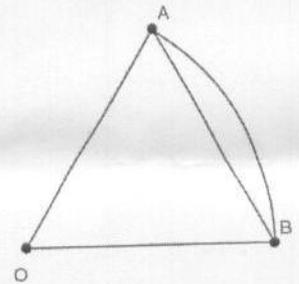
1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in

funzione di x , da $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \text{sen } x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.

2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).

3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2 . Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W .



PROBLEMA 2

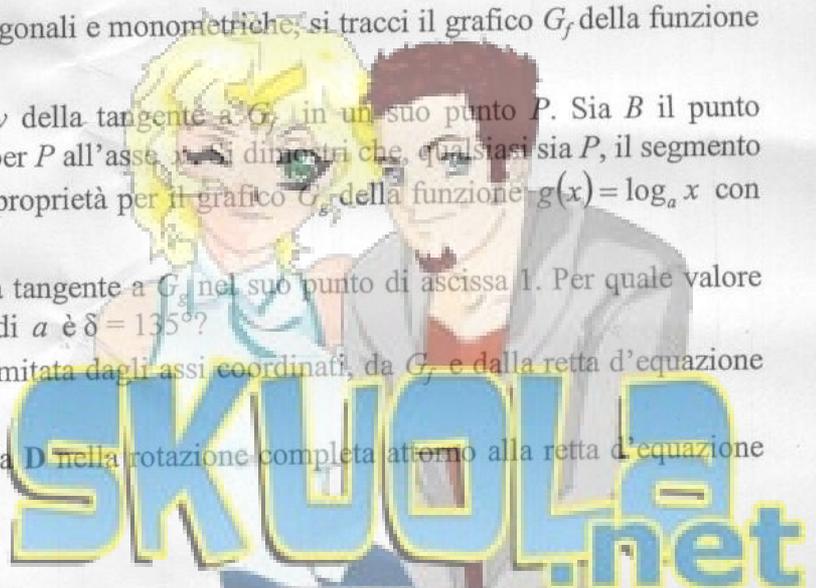
Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (logaritmo naturale)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P . Sia B il punto d'intersezione con l'asse x della parallela per P all'asse y . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?

2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45^\circ$? E per quale valore di a è $\delta = 135^\circ$?

3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D .

4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.



M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin x$ e il cui grafico passa per il punto $(0, 2)$.
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. "Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

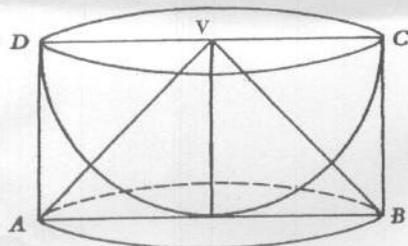
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8. Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

9. Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", Galileo Galilei descrive la



costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dall'ellindro.

Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.