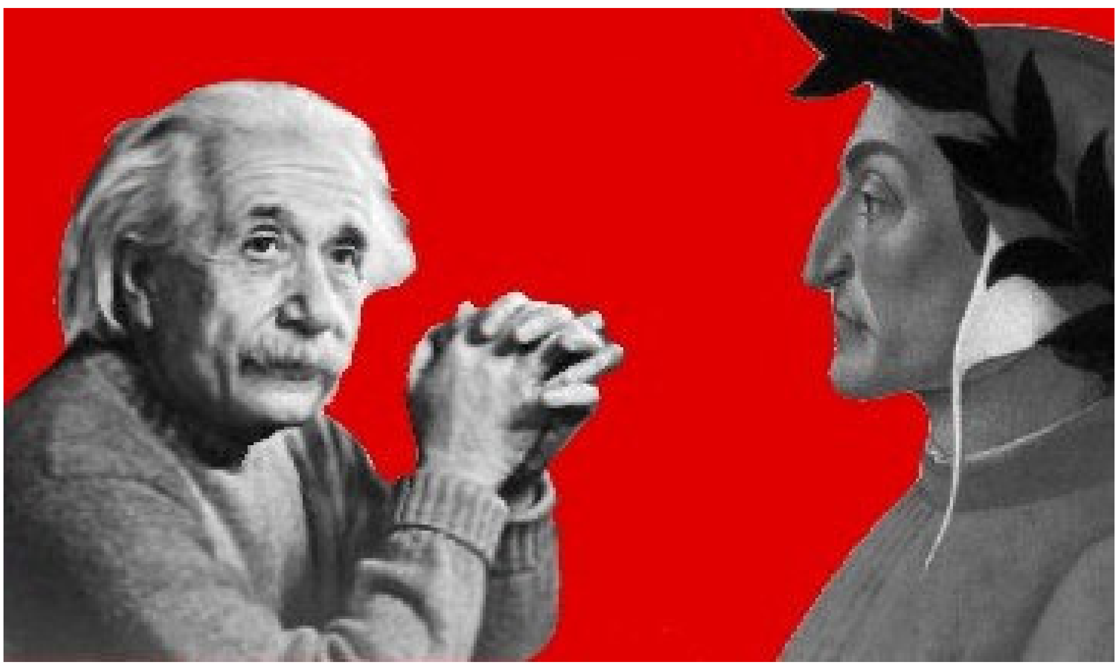
Liceo Classico “Ludovico Ariosto”, Reggio Emilia a.s. 2006/2007

DANTE E LA MATEMATICA

VIAGGIO ALLA SCOPERTA DELLA SCIENZA CHE SI NASCONDE TRA LE PIEGHE DELL’ARTE



"Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω" *(Platone)*

(“Qui non entri chi non sa di geometria”)

Francesca Zanichelli III A Tesina di Maturità

Premessa di ordine personale

La scelta dell'argomento di questo mio lavoro deriva da due necessità di carattere strettamente personale.

La prima è una sorta di ringraziamento che al termine di questi cinque anni voglio rivolgere alla mia scuola, il Liceo Classico, per quello che ha saputo trasmettermi.
Entrata con un'impostazione scientifica e una certa diffidenza nei confronti degli studi umanistici, ho avuto l'opportunità di conoscere, comprendere e infine amare quella seconda metà della cultura (e di me) che fino a quel momento non avevo saputo cogliere. E, senza mai rinnegare l'altra, ho imparato a vederle come complementari, necessarie e a volte persino sovrapponibili. Non è naturalmente l'unica cosa che questa esperienza mi ha dato, ma quella che io ritengo alla base di tutto il resto e fondamentale non solo per la mia formazione culturale, ma per la conoscenza di me stessa.

La seconda ragione è invece una sfida intellettuale. Più volte mi sono trovata al centro di scontri scienza-letteratura e più volte ho combattuto per questo e per l'altro schieramento.
Tra gli amici del classico ho spesso dovuto difendere strenuamente una matematica apertamente avversata e incompresa, tra gli amici dello scientifico ho dovuto spendermi a favore di una letteratura disprezzata e banalizzata. I risultati per la verità non sono mai stati vincenti né da un lato né dall'altro. Mi propongo quindi in quest'occasione di definire la mia posizione, non schierandomi su uno o sull'altro fronte, ma ponendomi sul fronte comune, non difendendo l'una o l'altra, ma difendendo il loro uguale valore e mostrando le possibilità di convivenza non solo pacifica, ma anche incredibilmente produttiva sul piano intellettuale.

E chissà mai se riuscirò a convincere qualcuno.

Reggio Emilia, 17/06/07

Francesca Zanichelli

Indice

Introduzione

"La matematica è un'ostentazione di audacia della pura ratio; uno dei pochi lussi oggi ancora possibili."

Così scrive Robert Musil in un saggio del 1913 dal titolo piuttosto inaspettato per uno scrittore: "*L'uomo matematico*". Inaspettato perché l'opera non si traduce in un'irriverente caricatura dello scienziato così come è stilizzato nell'opinione comune (occhiali tondi, calzini di colore diverso, aridità di sentimenti, vuoto di passioni), bensì in un fervido elogio della scienza e del suo coraggio intellettuale. Al termine del viaggio letterario-scientifico, che qui propongo, ci renderemo conto che la voce di Musil non è l'unica ad essersi elevata a favore di un apprezzamento reciproco tra le due "culture", molti altri letterati, artisti e scienziati si sono mossi in questo senso, dal passato sino ad oggi.
Scopriremo che nell'antichità campo scientifico e campo umanistico fiorirono sul medesimo terreno, che per gran parte della storia successiva medievale l'orizzonte culturale rimase sostanzialmente uno e privo di fratture, che in epoca moderna, per quanto ogni ramo del sapere sia divenuto sempre più consapevole della propria individualità e specializzazione, è ancora possibile un dialogo e una condivisione di interessi. Dovremo anche ammettere che al giorno d'oggi la pur florida abbondanza di esperienze di questo genere resta limitata ad alcuni ambiti intellettuali, senza che ne sia coinvolta l'opinione comune, che dal canto suo tende purtroppo a mantenere in vita una mentalità fatta di luoghi comuni e banalizzazioni.
Perché ciò sia avvenuto è difficile dirlo, più facile è capire perché ciò non sarebbe dovuto avvenire e non dovrebbe verificarsi tuttora.
In primo luogo scienza e letteratura nascono sulle medesime basi: la curiosità nei confronti del mondo che ci circonda, il desiderio mai appagato di raggiungere la piena verità, lo stupore nei confronti dei meccanismi di straordinaria *precisione* e *bellezza* che regolano il nostro Universo. La prima ragione, come si sarà capito, deriva dal mondo esterno, che rivela una profonda unione tra le due branche del sapere: in natura il bello è anche armonioso, è anche geometrico, e questa è la base della sua bellezza; nell'Universo ciò che desta stupore è anche scientificamente preciso e perfetto, e sono proprio questi meccanismi fisici-matematici che portano a stupirsi. Indagare il bello e l'incredibile attraverso i sentimenti che questi suscitano, o attraverso le regole che li generano, differisce solo perché in un caso sono indagate le conseguenze, nell'altro le cause. Gli oggetti di studio sono complementari (non li definiremmo comunque opposti) ma le sensazioni da cui derivano sono le stesse. Piacere estetico, curiosità e ammirazione riempiono il lavoro tanto dello scienziato quando del poeta.
La seconda ragione è di carattere più strumentale e riguarda i metodi di espressione. Tanto il matematico quanto il poeta utilizzano un linguaggio di grande potenza. Il poeta condensa concetti e sentimenti in poche parole pregnanti, magari meno chiare di un discorso in prosa, e che pure possiedono una forza molto maggiore. Così il poeta avverte anche la necessità di darsi a volte schemi quasi scientifici, metrici e di resa espressiva. Il matematico dal canto suo si trova a destreggiarsi con un linguaggio altrettanto sintetico e di non minor forza. In una formula sono compresse leggi che, per la loro verità inconfutabile e per il loro significato denso di conseguenze, sembrerebbero pronte a esplodere da un momento all'altro.
Ma la ragione ultima, e io credo più importante, va cercata all'interno dell'uomo stesso. E' la ratio di cui parla Musil che infligge il colpo mortale a ogni tentativo dualizzante della cultura. Più di ogni funzionalità pratica ed espressiva, ciò che muove tanto il matematico, quanto il poeta, l'artista, l'intellettuale, l'*uomo* insomma senza altre determinazioni di

sorta, è il piacere intellettuale, la forza propulsiva dell'immaginazione, che lancia la ragione a una corsa senza fine (e che sia immaginazione artistica o matematica poco cambia), la prorompente caparbietà dell'uomo umano di ogni tempo.

E' l'*uomo razionale* il protagonista di questo lavoro.

La struttura si articola in due parti distinte. Nella prima sezione sarà analizzata in maniera approfondita la scienza nell'opera dantesca, sia dal punto di vista di quello che Dante vi ha inserito, sia dal punto di vista di quello che gli scienziati vi hanno letto.
La seconda parte procederà invece per cenni più rapidi su un orizzonte più ampio, che dall'antichità approda ai giorni nostri, alla ricerca di altre esperienze che arte e scienza hanno condiviso. Sorprendentemente queste si sono rivelate molto più numerose di quello che ci si potrebbe aspettare, pertanto è stato necessario operare una scelta di quelle che ho ritenuto più significative e interessanti.
Si noterà infine una singolare ricorrenza dei temi scientifici. Il fatto, in un primo momento non intenzionale, potrà suggerire al lettore che questi siano quegli argomenti che hanno maggiormente colpito la fantasia degli scrittori. E' giusto tuttavia aggiungere che sono anche quelle branche della scienza che più mi affascinano e interessano e che forse inconsapevolmente ho prediletto nella trattazione.

DANTE TRA RIGA E COMPASSO

Un viaggio oltremondano alla scoperta di mondi letterario-scientifici

"Considerate la vostra semenza: fatti non foste a viver come bruti, ma per seguir virtute e canoscenza."

Premessa di ordine metodologico

Ho deciso di iniziare questo studio in modo volutamente a-cronologico, quasi in rispetto di un diritto di precedenza.
Sono due eccellenze quelle che porto nel primo capitolo a incontrarsi: la Divina Commedia, più grande opera della letteratura italiana, e la Matematica, regina di tutte le scienze. Se sarò in grado di mostrarne la sostanziale vicinanza la maggior parte dei miei intenti iniziali sarà già raggiunta.

E' necessario tuttavia premettere qualche parola a questo discorso.

Gli scienziati che si sono lanciati sulle tracce di impronte scientifiche nel testo dantesco sono numerosi e qualche volta è inevitabile che siano incappati nella trappola della tentazione di attribuire a Dante qualche conoscenza di troppo, di farsi prendere un po' troppo la mano investigatrice, magari in buona fede, nello slancio entusiastico di ammirazione del genio.
In altre occasioni ci si è impantanati in elucubrazioni cronologiche che permettessero di definire con sempre maggiore precisione le conoscenze scientifiche di Dante.
E' corretto che precisi quali sono i miei intenti.

NON mi interessa indagare con precisione maniacale le conoscenze scientifiche di Dante, le quali, anche se si fossero limitate alle nozioni basilari di un qualunque uomo di cultura del tempo, non andrebbero a minare il mio discorso. Potrà capitare tuttavia nel corso della trattazione di soffermarmi marginalmente anche su questi aspetti.

NON mi interessa nemmeno inerpicarmi in fantasiosi studi numerologici, che, per quanto divertenti, non apportano molto ai miei fini.

Quello che mi interessa e su cui si basa la mia analisi del rapporto tra la scienza e Dante si articola invece su tre fondamentali punti:

- L'analisi di come Dante abbia saputo cogliere e interpretare originalmente il potere <u>immaginifico</u> e <u>metaforico</u> delle scienze
- L'osservazione di come, consapevolmente o inconsapevolmente, strutture scientifiche, o più genericamente <u>logico-razionali</u>, siano alla base e della struttura della Commedia e del pensiero dantesco
- La lettura "rovesciata" di studi moderni della scienza nella Commedia, che, anche se non apportano sostanziali sviluppi sulla scienza in Dante, rivelano come scienziati moderni leggano con passione il nostro poeta e riescano a scorgere nelle sue parole immortali ciò che loro indagano altrettanto appassionatamente nei loro studi.

Dante parla in numeri

Aritmetica e Geometria

Dopo gli anni '90 del XIII secolo Dante si dedica agli studi di filosofia, entrando a stretto contatto con il pensiero di Boezio, "l'anima santa" che poi collocherà nel cielo del Sole del Paradiso e autore di quel "De consolatione philosophiae" su cui si formò il poeta. Ma Boezio fu anche traduttore dell'opera di Euclide e scrisse lui stesso un "De institutione aritmetica", di cui non è da escludere che Dante abbia avuto conoscenza.
L'aritmetica e la geometria, che trapelano dalla Commedia, per la verità, non rivelano una conoscenza della matematica che vada molto oltre la cultura generale, nonostante ciò l'immagine che Dante ce ne restituisce è sorprendente. Non solo trae spunto dalle sue leggi per delineare immagini di grande forza e incisività, ma ne realizza anche un notevole elogio sul piano epistemologico. Come vedremo dai singoli passi dell'opera, Dante ha una lucida consapevolezza dei limiti della ragione umana di fronte alla verità divina: alcune volte questi limiti sono rivelati dalla scienza, altre volte dalla poesia e dalla capacità di espressione. In entrambi i casi, pur mettendone in luce il limite, il poeta eleva scienza e poesia, entrambe, a massime espressioni della razionalità dell'uomo: piccola, sì, di fronte a Dio, ma meravigliosamente grande nel mondo.

- **Un numero infinitamente grande**

"L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che'l numero loro
<u>più che'l doppiar de li scacchi s'inmilla</u>".

(Paradiso XXVIII, 91-93)

L'infinito è uno dei concetti matematici che più frequentemente ritornano nelle opere letterarie, poeti e scrittori spesso si rivolgono alla matematica per riuscire a rendere in termini più realistici "numericamente" una realtà tanto lontana dall'esperienza umana.

La situazione è la seguente: i canti XXVIII e XXIX del Paradiso sono dedicati alla dottrina degli angeli; Dante osserva le categorie angeliche che presiedono ai nove cieli del Paradiso, disposte secondo nove cerchi concentrici in movimento: da ognuno di essi, come da un pezzo di ferro incandescente, un numero enorme di scintille si stacca dal proprio cerchio di competenza, in modo che gli angeli si distinguano uno a uno, pur continuando a seguirne il movimento.
Ora Dante auctor si trova di fronte a un problema da risolvere: vuole rendere l'immagine di un numero grande, grandissimo, *tendente ad infinito*. Che la sua genialità artistica, sempre così strettamente legata al potere visivo delle parole, non si possa accontentare di una qualsiasi banalizzazione dell'immagine è evidente al lettore della Commedia. Una sbrigativa definizione "infiniti" avrebbe costituito qualche serio problema di carattere teologico, oltre a risultare notevolmente meno incisiva per il lettore, la cui fantasia è stimolata dal poter immaginare di contare fino a tale numero. Mentalmente di certo non può arrivarci, ma la sua concreta finitudine lo rende molto più efficace.

Dante sceglie dunque di cercare un più azzeccato parallelo proprio nella scienza dei numeri.
Il riferimento è ad una gustosa storiella di carattere matematico, che doveva circolare negli ambienti culturali del tempo.

Si narra che Sissa Nassir, l'inventore degli scacchi, abbia chiesto al sovrano di Persia, cui aveva fatto dono del nuovissimo passatempo, una ricompensa apparentemente modesta: presa la scacchiera 8x8 del gioco che aveva inventato, il sovrano gli avrebbe dovuto donare *solamente* qualche chicco di riso. Più precisamente un chicco di riso per la prima casella, il doppio (ovvero due) per la seconda, il doppio ancora (ovvero quattro) per la terza e così via fino alla sessantaquattresima, ultima casella.
E' fuori discussione che Dante potesse calcolare il numero risultante, ma era già ben noto che al di là delle apparenze si trattava di una quantità mostruosamente grande, a motivo della vertiginosa crescita di una funzione esponenziale.
Solo per curiosità, i chicchi di riso che Sissa Nassir avrebbe dovuto ricevere erano un numero illeggibile: 18 446 744 073 709 551 615. (dico "avrebbe dovuto ricevere" perché la leggenda vuole che il sovrano, scoperto l'arguto imbroglio e irritato da tanta irriverenza, abbia risparmiato sul riso facendo mozzare la testa al povero Sissa Nassir.)

Dante evidentemente conosceva questo aneddoto, d'altra parte ai suoi tempi circolavano numerosi giochi matematici, che non potevano non aver stuzzicato la sua vivace intelligenza[1].
Non ancora soddisfatto del numero ottenuto (non fosse mai che il numero degli angeli celesti fosse assimilato a quello vagheggiato nelle pretese di ricchezza di un comune uomo), Dante sostituisce alle potenze del due le potenze del mille. Così gli angeli invece che raddoppiare si "inmillano", uno dei tipici neologismi danteschi, che chiude il paragone poetico affiancando all'abilità di maneggiare aneddoti numerici l'immancabile creatività linguistica.

- **Certezze incrollabili**

"O cara piota mia, che sì t'insusi,
che come veggion le terrene menti
<u>non capere in triangol due ottusi</u>,

così vedi le cose contingenti
anzi che sieno in sé, mirando il punto
a cui tutti li tempi son presenti;"

(Par. XVII 13-15)

e pochi versi più avanti

"[…] avvegna ch'io mi senta
ben <u>tetragono</u> ai colpi di ventura"

(Par. XVII 23-24)

---

[1] Ricordiamo ad esempio *Ad acuendos juvenes* di Alcuino (735-804), che traeva spunto dai testi di Beda il Venerabile (che Dante colloca in Paradiso insieme a Boezio).

Uno dei canti più emotivamente intensi della Commedia, il XVII del Paradiso è interamente concentrato sull'incontro tra Dante e il suo trisavolo, Cacciaguida, incontro di importanza centrale nell'economia del viaggio dantesco per l'annuncio dell'esilio e la legittimazione dell'opera d'arte. Le parole, che i due si scambiano, sono tra le più complesse e ricche di immagini della Commedia. E anche in questa occasione Dante non disdegna di inserire rimandi matematici.
E' una delle più unanimemente accettate qualità della matematica (pur se talvolta convertita in difetto) quella che il poeta sfrutta in questi versi: l'insindacabile certezza dei suoi teoremi. Per Dante diventa simbolo del massimo livello di verità cui la mente umana può assurgere. Con la stessa sicurezza con cui l'uomo è in grado di "vedere" che in un triangolo non possono essere due angoli ottusi, su un piano decisamente più elevato il beato è in grado di "vedere" passato, presente e futuro. In realtà l'immagine è più raffinata e complessa di quello che voglia sembrare, nella fantasia del lettore si affiancano infatti due figure di segno opposto: da un lato il triangolo che nella chiusura del suo perimetro, nella sua "finitudine", non può contenere gli spaziosi ed aperti angoli ottusi; dall'altro un elemento di ancora maggiore finitudine, anzi di finitudine per eccellenza, il punto, che pure riesce ad accogliere in sé l'infinito dell'eternità. E' lo scacco della ragione umana, l'abisso incolmabile tra finito e infinito, la sconfitta persino della matematica stessa. Che Dante però adombra, in termini allusivi e metaforici, sfruttando la stessa geometria.

Con un lieve scarto, ma sulla stessa linea di significati, si colloca il riferimento geometrico di poco successivo. La certezza che infonde la scienza non è solo desunta dall'infallibilità dei suoi ragionamenti, ma a un livello più superficiale e immediato sono le sue forme stesse a suggerirlo. E chi non vorrebbe affrontare gli sferzanti colpi del destino con la sicura stabilità di un cubo?

- **Cerchi e circonferenze: il problema della quadratura del cerchio**

"Qual è il geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi si indova;"

(Par. XXXIII 133-138)

Non è la prima occasione in cui Dante rievoca l'antichissimo problema della quadratura del cerchio, che diventa un altro dei simboli dell'impossibilità della conoscenza. Possiamo pensare alla geometria di cui parla Dante nel Convivio II xiii 27 ("*e 'l cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente*") e nel De Monarchia III iii ("*infatti lo studioso di geometria ignora la quadratura del cerchio*").
La situazione in cui il poeta si trova ora è però sicuramente più solenne. Siamo nell'ultimo canto del Paradiso, la "vista nova" cui Dante si trova di fronte è Dio stesso. Al potenziarsi della vista del pellegrino, Padre Figlio e Spirito Santo si sono infine mostrati sottoforma di tre cerchi (non a caso il cerchio!), di diverso colore e uguale raggio. All'osservazione più

acuta il cerchio-Figlio generato dal Padre appare a Dante dipinto dentro di sé, del suo stesso colore, con l'immagine dell'uomo.
E' il mistero dell'Incarnazione, che Dante con le sue forze soltanto non riesce a penetrare, così come il geometra non riesce a quadrare il cerchio.
Ma in questo contesto appare evidente come la primaria funzione del rimando geometrico sia umanamente più profonda. Quello che deriva al lettore, con tutta la pienezza di sentimenti del caso, è il vero e proprio dramma dell'uomo intellettuale, che "tutto s'affige", tenta e ritenta, ma deve ad un certo punto ammettere i limiti delle proprie capacità razionali. Non si può non avvertire la partecipazione sincera di Dante, che per primo ha dovuto affrontare questa consapevolezza, per primo ha cercato di combatterla e confutarla, e che per primo ha dovuto infine abbassare il capo e accettarla, aprendosi solo così la strada verso una realtà più alta. Dante ha capito che la sola razionalità dell'uomo non può consentirgli di raggiungere le verità ultime, nonostante questo non ha dimenticato il profondo scoramento che deriva dalla scoperta di questo limite umano e lo ricorda in più passi della commedia: dall'innegabile vicinanza che rivela nei confronti di Ulisse a quest'ultimo grazioso abbozzo del geometra che si affanna dietro l'impossibile.
Come si è accennato all'inizio, si può azzardare l'ipotesi che Dante adduca la matematica a massima rappresentante del fallimento della ragione umana. E' una critica, certo, che Dante muove alla scienza, ma io credo che la ragione di fondo di questa ricorrenza sia da ricercare nel fatto che il nostro poeta vede nella matematica il più alto esempio di perfezione raggiungibile dalla sola ragione umana. Che essa giunga al fallimento e debba essere superata è insito nel limite dell'uomo e nulla toglie al valore della speculazione scientifica.

Questo duplice valore della Matematica può essere ben esemplificato da un bel passo del Convivio.

- **Matematica, "Sole" delle scienze**

"E <u>lo cielo del Sole si può comparare a l'Arismetrica</u> per due proprietadi: l'una si è che del suo lume tutte l'altre stelle s'informano; l'altra si è che l'occhio nol può mirare.. E queste due proprietadi sono ne l'Arismetrica: ché del suo lume tutte s'illuminano le scienze (…) L'altra proprietade del Sole ancor si vede nel numero, del quale è l'Arismetrica: che l'occhio de lo 'ntelletto nol può mirare; però che 'l numero, quant'è in sé considerato, è infinito, e questo non potemo noi intendere."

(Conv. II, xiii)

Dante ha appena ricordato come tre anni dopo la morte di Beatrice si sia innamorato di una "donna gentile". Dopo l'interpretazione letterale, Dante svela quella allegorica, che mira a celare sotto le spoglie della donna lo studio della Filosofia, cui si era effettivamente dedicato dopo la morte della donna amata. La traduzione allegorica di "cielo" in "scienza" induce Dante ad elaborare una complessa costruzione di parallelismi tra i primi sette cieli e le arti di Trivio e Quadrivio. Al cielo delle stelle fisse fa poi corrispondere Fisica e Metafisica, al Primo Mobile la scienza Morale e all'Empireo la Teologia.
Ci interessano in modo particolare le motivazioni che Dante adduce per la corrispondenza tra il cielo del Sole e l'Aritmetica. Il paragone è bellissimo: come il Sole tutto illumina, tutto permette di vedere, ma non può essere visto da occhio umano esso stesso, così la Matematica, "regina delle scienze" (cit. da Gauss, nda), di tutte le scienze è alla base, tutte le illumina della sua luce, che invera. Ma ancora una volta nella sua luminosità diventa inaccessibile alla mente umana: nel numero, inteso a livello concettuale, è insita

l'idea di infinito, e tale idea per il piccolo finito uomo è semplicemente…accecante.

Logica

Quando si parla di presenza della Logica nell'opera dantesca naturalmente non ci si riferisce alla Logica Matematica propriamente detta, che nasce intorno alla metà del XIX secolo con l'opera di Georges Boole. Pur tuttavia, la chiarezza dei ragionamenti, l'impostazione deduttiva di stampo aristotelico, la limpida struttura del pensiero, tutto ciò che insomma non potremmo definire con altro termine che *logica*, è innegabilmente presente in ogni espressione della visione dantesca del mondo. Che poi in questo caso il confine tra filosofia e scienza sia piuttosto confuso, e anzi la logica dantesca si debba sicuramente più strettamente legare alla sua formazione filosofica, nulla toglie al carattere scientifico che la sua forza imprime su ogni pensiero.
Dove e come Dante ha studiato la logica?
Innanzitutto nell'ambito del Trivio: Grammatica, Retorica, Dialettica. In particolare l'ultima disciplina comprende gran parte degli studi di logica. (In ambito "umanistico"!)
In secondo luogo naturalmente attraverso lo studio di Aristotele, nella versione latina (il cosiddetto "Aristotele latino"). E' da Aristotele che derivano le loro basi praticamente tutti gli studi logici del Medioevo, lo stesso pensiero di Tommaso d'Aquino, che pure Dante studia.
Boccaccio immagina un viaggio di Dante a Parigi, in cui avrebbe costruito le proprie basi di aristotelismo e logica[2]. Per la verità pare che Boccaccio abbia inventato questo evento, quel che è certo è che nessuno avrebbe contestato neppure a quei tempi la formazione prettamente logica del filosofare dantesco. D'altra parte l'aristotelismo contava esponenti anche nella Facoltà di Arti a Bologna che Dante frequentò. Pare anche che certi studi di logica modale a Bologna non siano andati incontro alle condanne che subirono invece a Parigi, dal momento che Bologna mancava della facoltà di teologia, e quella di giurisprudenza era protetta dall'imperatore. Così anche quando l'opera di Boezio fu condannata nel 1277 non scomparve dalla città.

In quali passi della Divina Commedia Dante cita esplicitamente la logica?

- **O l'una, o l'altra… o tutte e due?**

"Io li credetti; e ciò che'n sua fede era,
vegg'io or chiaro sì, come tu vedi
<u>ogni contraddizion e falsa e vera</u>."

(Par. VI 19-21)

E' il racconto dell'imperatore Giustiniano, che dall'inizio del canto e in seguito alla richiesta di Dante ha preso la parola e sta rapidamente ripercorrendo da un lato la sorte dell'Impero, dall'altro la propria vicenda terrena. Secondo le conoscenze dantesche, pare tra l'altro non del tutto corrette sul piano storico, Giustiniano avrebbe inizialmente aderito

---

[2] Giovanni Boccaccio, *Trattatello in laude di Dante*

all'eresia monofisita, accolta con un atto di fede, e si sarebbe poi convertito al cattolicesimo. Dante sottolinea l'ingenuità arazionale della prima fede eretica ("credea, e di tal fede era contento"). In seguito all'incontro con il Papa Agapito avviene la conversione, che mantiene però ancora i connotati di fede della prima esperienza. La medesima, nella più piena visione del beato, assume poi i connotati di verità dimostrata logicamente.
Il verso 21 in realtà è stato interpretato dai critici in modi diversi, che pure non sono radicalmente opposti nel significato che ne risulta.
Dante probabilmente fa qui riferimento al celebre "principio del terzo escluso": dati due enunciati di cui uno la negazione dell'altro (A e non A) uno è vero e l'altro è falso.
Bruno d'Amore propone un'interpretazione alternativa e un po' più azzardata: il critico vorrebbe leggere in questa frase un riferimento al metateorema dello Pseudo-Scoto[3], secondo il quale a partire da una contraddizione si può dimostrare qualunque cosa, sia il falso che il vero. D'Amore dichiara di preferire questa seconda interpretazione perché più coerente col senso dell'intero passo: mentre il principio del terzo escluso, in quanto appunto principio, ha ancora teoricamente qualcosa dell'atto di fede, quello dello Pseudo-Scoto è un vero e proprio teorema, più vicino qui alla nuova dimensione dimostrativa e razionale in cui Giustiniano vede la realtà.
Personalmente mi pare più facile accettare la prima ipotesi e magari vedere nella frase un diretto riferimento all'esperienza di Giustiniano: dopo aver conosciuto due teorie opposte sulla natura di Cristo, e averne seguita una per fede, ora è in grado di vedere in modo logicamente chiaro che l'una, la prima, era falsa e l'altra vera.
Al di là di queste disquisizioni che di fatto poco cambiano nell'ottica complessiva, è interessante sottolineare come nella dimensione ultraterrena la *scientificità* della scienza sia estesa a ogni tipo di realtà.

- **Logica... diabolica!**

"Francesco venne poi, com'io fu' morto,
per me; ma un de' neri cherubini
li disse: "Non portar: non mi far torto.

Venir se ne dee giù tra' miei meschini
Perché diede il consiglio fraudolente,
dal quale in qua stato li sono a' crini;

ch'assolver non si può chi non si pente,
né pentere e volere insieme puossi
per la contraddizion che nol consente".

Oh me dolente! Come mi riscossi
Quando mi prese dicendomi: "Forse
tu non pensavi ch'io loico fossi"!

(Inf. XXVII 112-123)

[3] E' enunciato nelle *Summulae logicales* di Pietro Ispano, che Dante conosceva e cita nel Paradiso (XII,135): *"lo qual giù luce in dodici libelli"*

Al di là della maggiore o minore scientificità del contenuto logico di questo passo, non ho voluto tralasciarlo, se non altro quale mirabile esempio della capacità del nostro poeta di dipingere con poche pennellate scenette gustosissime e ironiche, nonchè personaggi indelebili, come il sadico diavoletto di questo passo.
Siamo in questo caso nella prima cantica: l'Inferno. Lo scenario è quello della bolgia ottava, la celebre bolgia che ospita, tra i consiglieri di frode, Ulisse. Ma è un altro dannato ad interessarci in questa sede: Guido da Montefeltro. Lo sventurato, un tempo "uomo d'arme", più volpe che leone, celebre per la sua astuzia, si era pentito ed era entrato nell'ordine francescano, deciso nella vecchiaia a "calar le vele e raccoglier le sarte". (forse non casuale il rimando "marittimo" all'Ulisse del canto precedente?). Il peccato è però in agguato e gli si manifesta sotto le spoglie dello stesso pontefice Bonifacio VIII ("il gran prete, a cui mal prenda!"). E' il Papa stesso che lo convince a dargli l'ultimo *consiglio fraudolento* dietro la promessa dell'assoluzione. Alla morte di Guido si colloca la scenetta grottesca qui riportata, che vede la sorta di bisticcio tra San Francesco e un nero cherubino per il possesso dell'anima del poveretto. Ad aver la meglio è il cherubino.. a suon di logica! Quello che sinteticamente condensa nelle sue irrevocabili sentenze è infatti un vero e proprio sillogismo di stampo aristotelico. Traducendo dovrebbe risultare più o meno così:

Ogni assolto è un pentito.
Nessun pentito è peccatore volontario.

…la conclusione è inconfutabile: Guido non può essere assolto! San Francesco resta a bocca asciutta, mentre il diavoletto si permette anche una divertita presa in giro al dannato: chi l'avrebbe mai detto che anche i diavoli sanno padroneggiare la logica?!

La Commedia letta dagli scienziati

Se, come abbiamo potuto ampiamente verificare nelle pagine precedenti, Dante non ha mai rifiutato alla scienza ruoli di importanza poetica, simmetricamente scienziati di ogni epoca, antichi e moderni, sono stati affascinati dalla Divina Commedia: in primo luogo, com'è ovvio, per le qualità poetiche e artistiche della stessa, ma in secondo luogo anche per la struttura scientificamente rilevante che Dante magistralmente costruisce nella sua edificazione dell'universo.

Il viaggio "infernale" di Galileo Galilei

"Galileo usa il linguaggio non come uno strumento neutro, ma con una coscienza letteraria, con una continua partecipazione espressiva immaginifica, addirittura lirica"

(Italo Calvino, "Due interviste su scienza e letteratura")

Non molto conosciute sono forse le due lezioni che lo scienziato pisano tenne sulla struttura dell'Inferno dantesco. Nonostante gli interessi prettamente scientifici precocemente dimostrati, nel 1588 il giovane Galileo (aveva all'epoca solo 24 anni) fu chiamato dall'Accademia Fiorentina a tenere alcune conferenze di argomento letterario. (Come non ravvisare anche in questo personaggio la positiva tendenza ad una visione globale e multidisciplinare della cultura?). Gli argomenti di tali lezioni dovevano vertere sull'Ariosto, il Tasso e naturalmente su Dante. Se per i primi due tuttavia quella richiesta a Galileo era una valutazione letteraria dell'opera, molto più interessanti ai nostri fini sono le due lezioni che tenne "*circa la figura, sito e grandezza dell'Inferno di Dante*". Per la verità il fondatore degli studi di cosmografia dantesca fu un matematico e architetto fiorentino: Antonio Manetti, il quale, pur non pubblicando niente in vita, lasciò alcuni significativi studi inerenti alla struttura dell'Inferno dantesco. La stessa Giuntina[4] era corredata di illustrazioni e di una serie di xilografie costruite secondo le idee del Manetti. Gli studi sulla forma e struttura del mondo dantesco erano divenuti oggetto di un vero e proprio dibattito pubblico, che coinvolgeva, probabilmente, le stesse rivalità tra le varie città italiane. La polemica contro i calcoli del Manetti venne inaugurata da Alessandro Vellutello, lucchese, che proponeva le proprie, diverse, illustrazioni. L'Accademia fiorentina, preoccupata forse dell'iniziativa che prendeva di mira il monopolio fiorentino su Dante, affidò proprio al giovane Galileo il compito di difendere la posizione del Manetti. Compito che Galileo eseguì con originalità e intervento personale.

Il poeta tedesco Durs Grünbein ha recentemente attribuito alle lezioni di Galielo, apparentemente di limitata importanza, il carattere di evento storico. Sarebbe questo, a suo avviso, il momento critico in cui letteratura e scienza presero definitivamente vie divergenti.

---

[4] l'edizione di Filippo Giunti della Commedia, datata 1506

Dal punto di vista fieramente letterario del poeta tedesco, lo studio di Galileo rappresenterebbe il primo esempio di ingerenza della scienza nella sfera letteraria, una scienza arrogante e presuntuosa, convinta di poter estendere il proprio dominio su ambiti che non sono suoi propri, abbassando l'opera di poesia a sterili misurazioni. Misurare l'arte è, secondo Grunbein, un affronto al poeta.

E' davvero così? Quali furono gli intenti di Galileo e quale può essere il significato, oggi come ieri, di leggere Dante armati di riga e compasso?

La risposta al primo interrogativo non può che essere cercata nelle parole dello stesso Galileo.
E' Dante, dobbiamo subito ricordare, che nello scrivere la Commedia lascia cadere numerosi indizi che solleticano la curiosità di chi si interessa di matematica e geometria. Qualche misura precisa ("miglia ventidue la valle volge" Inf. XXIX, 9), indicazioni geometriche. Partendo dall'inconfutabile postulato secondo cui nulla Dante pone a caso, non risulterà troppo assurdo domandarsi: è possibile costruire una struttura geometricamente regolata che faccia combaciare le indicazioni del poeta? Galileo (e molti altri) ci dimostrano che sì, ciò è possibile. Ciò che, io credo, è significativo e confuta nettamente la posizione di Grunbein è che Galileo era fermamente convinto che una tale struttura fosse creazione del poeta. Come esplicitamente afferma, le parole di Dante restano un poco nella tenebra solo perché lo richiede la poesia. L'obiettivo che lui, che Manetti, hanno perseguito è di "investigare la mente del poeta", di squarciare queste tenebre, portare alla luce ciò che il poeta ha nascosto tra i versi. Dante, dice Galileo, si è dimostrato "corografo e architetto di più sublime giudizio". Da queste parole credo risulti evidente quanto poco di arrogante e superbo vi fosse nell'atteggiamento dello scienziato. Rischia forse, ma l'opinione è mia personale, di cadere nell'anacronismo il poeta tedesco, che vuole attribuire lo sguardo in cagnesco con cui letteratura e scienza si sono da lontano sbirciate in epoca moderna a un tempo in cui poteva benissimo accadere che un letterato apprezzasse le scienze e uno scienziato tenesse conferenze letterarie. Forse per Grunbein, e per molti altri oggi, è difficile immaginare una complementarietà tra arte e scienza, un lavorare insieme. E' difficile capire che è possibile con metodi scientifici contribuire ad esaltare il lavoro di immaginazione, mostrare come esso sia ancora più mirabile, in quanto verosimile. Per Galileo, come per Dante, il fatto sarebbe risultato molto più naturale.
E allora sì, le conferenze di Galileo possono davvero essere considerate un momento storico. Ma non quale momento di rottura, bensì ultima eco di un orizzonte culturale destinato ad essere oscurato in età moderna. E questa è anche la risposta al secondo interrogativo.

Detto questo, Dante aveva davvero studiato matematicamente la struttura del suo Inferno? Difficile dirlo, parrebbe probabile una risposta negativa, anche se la considerazione del genio dantesco lascia sempre uno spiraglio alla speranza.
Certo, alcune delle riflessioni di Galileo appaiono meccanicamente calcolose, altre fanno spuntare il sorriso.
Per dare un'idea di queste lezioni riporto il passo forse più vivace e divertente dello studio, che rivela come Dante alle volte venga addirittura preso un po' troppo di parola!

Una proporzione…gigantesca!

Dopo aver studiato con precisa geometria l'intero imbuto infernale, Galileo si accinge a calare il proprio metro fino al centro della Terra: le ghiacce infernali. Come scoprire la grandezza di ciascuna? La via più sicura è sempre quella di affidarsi alle parole del poeta, il quale nel canto trentaquattresimo (28-33) dice:

"Lo 'mperador del doloroso regno
da mezzo 'l petto uscia fuor de la ghiaccia;
e più con un gigante io mi convegno,
che i giganti non fan con le sue braccia:
vedi oggimai quant'esser dee quel tutto,
ch'a così fatta parte si confaccia."

I versi, apparentemente inutili ai nostri fini, contengono in realtà tutto quanto vogliamo sapere. Come? Seguiamo schematicamente il pensiero di Galileo:

- Dante ci dice che la prima ghiaccia arriva a metà del petto di Lucifero
- È noto per altri passi della commedia che l'ombelico di Lucifero coincide con il centro della terra

→ se ne deduce che il nuovo obiettivo di ricerca è la misura che intercorre tra l'ombelico e la metà del petto di Lucifero, tale misura corrisponde infatti al raggio della ghiaccia. Inoltre, ai tempi di Galileo erano note molte proporzioni che regolavano le distanze tra le parti del corpo, pertanto il problema può ancora essere ridotto a un altro interrogativo:

quanto è alto Lucifero?

Anche in questo caso Dante ci viene in aiuto. I versi sopra riportati sotto le mentite spoglie di poesia rivelano infatti nientemeno che una proporzione matematica!
Qualcosa di questo genere:

altezza di Dante : altezza di gigante = altezza di gigante : braccio di Lucifero

I termini della proporzione parrebbero ancora difficili da tradurre in numeri, ma Galileo non si dà per vinto. Il primo termine è risolto senza troppi problemi: nelle biografie di Dante si parla di un uomo di media statura, pertanto facilmente stimabile in 3 braccia. L'altezza di un gigante, un po' meno frequentemente misurata, crea un po' più problemi. Ma ormai abbiamo capito che non esiste problema per cui Dante non ci abbia lasciato qualche indizio.
Parlando di Nembrot, il primo gigante che incontra dichiara infatti:

"La faccia sua mi parea lunga e grossa
come la pina di San Pietro a Roma;
ed a sua proporzione eron l'altr'ossa."
(Inf., XXXIII, 58-60)

La faccia di un gigante ha dunque le dimensioni della pigna bronzea che si trovava ai tempi di Dante nell'atrio di San Pietro a Roma. Galileo stima tale misura 5, 5 braccia.

Solitamente un uomo è alto otto teste, la statura perfetta sarebbe nove teste, ma Galileo esclude che i giganti siano di tale perfetta bellezza, pertanto in definitiva un gigante risulta essere alto 5,5 X 8 = 44 braccia. La proporzione può finalmente essere sciolta:

3 : 44 = 44 : braccio di Lucifero

→ braccio di Lucifero= 44 x 44 / 3 ≈ 645 braccia

Un braccio è la terza parte dell'altezza, pertanto Lucifero sarà alto 645 X 3= 1935 braccia. A Galileo, da buon matematico, non è sfuggito neanche il "più" della proporzione, che risolve approssimativamente, arrotondando l'altezza di Lucifero a ben 2000 braccia.. un esserino non indifferente!
La conclusione del problema è ora banale, Galileo sa che l'intervallo tra ombelico e metà petto è ¼ dell'altezza, per tanto il raggio della prima ghiaccia è di 500 braccia.

Ma che fatica ci ha fatto fare la fervida immaginazione di Dante!

Dante, Einstein e il nostro mondo un po'..complesso

"La cosa più bella che possiamo provare è il misterioso. E' fonte di tutte le vere arti e scienze." (Albert Einstein, *What I believe)*

Come abbiamo visto, gli scienziati contemporanei a Dante presero molto sul serio le sue parole e si arrovellarono alla ricerca di adeguate trasposizioni scientifiche dei suoi versi.
Una tendenza non troppo diversa, e sicuramente interessante, si è riscontrata in tempi recenti, quando hanno iniziato a fiorire studi di carattere scientifico sulla cosmologia dantesca, spesso accolti con una certa diffidenza. Certo è che con il progredire a passi da gigante della scienza, oggi i modelli ai quali si vorrebbe ricondurre il cosmo dantesco diventano sempre più complessi e sempre più assurda l'idea che il poeta stesso, pur nella sua genialità, abbia potuto immaginarli.
L'ottica che in questa sezione del mio lavoro intendo perseguire non è più quella dello studioso di Dante, che ricerca nelle parole del grande poeta il segno del suo apprezzamento per le scienze e della sua cultura onnicomprensiva. Il punto di vista si capovolge e l'attenzione si concentra sullo scienziato: è una tendenza che voglio, questa sì, presentare come positiva: quella dello scienziato, che ogni tanto distoglie lo sguardo dai suoi calcoli astrusi, prende in mano un libro, magari proprio la Divina Commedia, e nel fascino della sua poesia, delle sue immagini intense, sogna di scorgere quelle stesse forme che poco prima aveva descritto con numeri ed equazioni. Poco più che un gioco intellettuale, certamente, ma un gioco intelligente, affascinante.
E' in quest'ottica che chiedo venga letto lo studio che qui sinteticamente riporto.
E se qualcuno cercherà di riportarmi alla scientificità di una lettura "letterale" di Dante, gli risponderò che no, grazie, Dante non è solo ciò che ha scritto, ma anche ciò che in ogni epoca vi si legge.

Mi rifaccio in particolare in questa sede allo studio di Horia-Roman Patapievici, docente di Fisica all'Università di Bucarest fino al 1996, anno in cui ha abbandonato la carriera accademica per dedicarsi alla cultura umanistica, pur senza mai rinnegare la propria formazione scientifica. Non è stato comunque l'unico studioso a proporre letture di questo genere.

Per analizzare la cosmologia dantesca sarà utile fare un rapido excursus di quelle che erano le immagini dell'Universo diffuse negli ambienti culturali del suo tempo.
Il modello medievale del cosmo era in effetti molto vicino al modello antico. La sua prima forma era stata individuata dagli astronomi Eudosso e Callippo (IV secolo a.C.), ma un'immagine più completa e armoniosa è da attribuirsi a Tolomeo (II secolo a.C.). Tra questi due momenti non possiamo dimenticare i contributi fondamentali di Ipparco (dal punto di vista matematico) e di Aristotele (da quello filosofico e fisico). Da questi studi deriva l'immagine di un cosmo greco costituito fondamentalmente da una gerarchia rigorosa di nature distinte. Dal momento che la sfera era considerata forma geometrica di perfetta finitudine, l'Universo si presentava sottoforma di un certo numero di sfere concentriche che si susseguivano in funzione della loro natura. Nel centro dell'Universo, immobile, la Terra; attorno ad essa gli altri tre elementi, Acqua, Aria e Fuoco, nell'ordine. Dante conosceva probabilmente bene questo modello cosmologico, se è vero che nel 1320 a Verona presentò nella chiesa di Sant'Elena una "*Quaestio de aqua et terra*" in cui tentava di spiegare in termini aristotelici come sia possibile che al livello della crosta terrestre i due elementi acqua e terra coesistano.
Quella dei quattro elementi è la zona chiamata dai greci sublunare, è questo il mondo che Aristotele chiamava "della nascita e della distruzione", in cui ogni cosa è sottoposta all'azione distruttiva del tempo. Tra la zona sublunare e la zona celeste la cesura è di carattere temporale quanto ontologico. La zona celeste continuava la successione di sfere concentriche, in moto circolare uniforme, da quella della Luna a quella delle Stelle Fisse. L'intero movimento dell'Universo derivava dalla sfera delle Stelle fisse, dal motore chiamato da Aristotele "Primo mobile" o "Dio".
Questo modello, il modello in definitiva aristotelico, è stato ripreso dai Padri della Chiesa, che l'hanno adattato ai principi della creazione biblica. Per la verità alcuni punti "stridenti" non poterono essere evitati. Quello di Aristotele era infatti un dio integrato col mondo, che poteva essere definito in modo impersonale, quale "pensiero di pensiero", o "primo motore immobile". E' evidente la differenza nei confronti del Dio cristiano, un Dio personale, trascendente rispetto al mondo. Nello stesso modo nell'ottica cristiana il mondo non è eterno, ha avuto un suo inizio e avrà una sua fine. Era insomma necessario conciliare l'Universo aristotelico con la presenza di un Dio ubiquo e attivo, pieno d'amore, contemporaneamente centro della creazione e ad essa trascendente. Il mondo cristiano deve avere due cesure in più: tra cose visibili e cose invisibili (corporeo e incorporeo) e tra creato e increato (creatura e Creatore). Come vedremo, Dante riuscirà a conciliare queste discordanze in maniera incredibile.

Prima di ascendere ai cieli del paradiso Patapievici ritiene significativo ricordare un luogo dell'Inferno, in cui si verifica la prima di una serie di "inversioni", che acquisiranno nuovo significato nel Paradiso. Dante e Virgilio sono arrivati al centro della Terra, là dove è conficcato Lucifero. Aggrappandosi ai suoi peli ghiacciati e alle "gelate croste" Dante e Virgilio iniziano a scendere lungo il fianco di Satana. E qui si verifica un fatto interessante: quando Dante e Virgilio arrivano "là dove la coscia si volge, a punto, in sul grosso dell'anche" il pellegrino a un tratto si accorge che Lucifero.. è a gambe in su! Da quel momento per quanto lui e Virgilio scendano iniziano in realtà a salire verso l'emisfero

Australe. Il fatto, di per sé banale, ma anche interessante per la concezione gravitazionale del nostro pianeta, avrà qualche assonanza con altri luoghi del Paradiso. Come nota lo studioso, un'inversione di carattere simile è per la verità riscontrabile anche nel Purgatorio, se è vero che mentre nell'Inferno la discesa è orientata verso sinistra, nel Purgatorio la spirale dell'ascesa è orientata a destra. Per di più è come se il "peso gravitazionale dei peccati" si trasformasse nel purgatorio in una levitazione delle anime sempre più pure. E in effetti anche le classi di peccato sono invertite tra Purgatorio e Paradiso (i lussuriosi, primo cerchio nell'Inferno, diventano ultimo nel Purgatorio e così via).

Passiamo dunque a un rapido riepilogo del percorso dantesco nella terza cantica della Commedia. In cima alla montagna del Purgatorio si trova il Paradiso terrestre, che non è più sottomesso alla fisica sublunare. Dopo che Dante è stato purificato dalle acque dei due fiumi santi: il Lete e l'Eunoè, può ascendere al Paradiso Celeste, immerso nella luce sfavillante di un eterno meriggio. E' così che Dante supera la prima grande cesura dell'Universo, quella che separa la zona sublunare da quella celeste, in cui il tempo è il tempo dell'eternità. Siamo ancora nella zona delle cose visibili e corporee, ma non più sottoposte all'alterazione del tempo. I cieli che si susseguono a questo punto sono disposti secondo la visione già tolemaica, concentrici e tutti di raggio maggiore, l'ultimo comprendente tutti quelli sottostanti con al centro la Terra. In sintesi sono: il primo cielo della Luna (in cui Dante incontra le anime dei negligenti ai voti), il secondo cielo di Mercurio (anime che fecero il bene per desiderio di gloria), il terzo cielo di Venere (spiriti amanti), quarto cielo del Sole (anime sapienti), quinto cielo di Marte (combattenti per la fede), sesto cielo di Giove (spiriti giusti), settimo cielo di Saturno (spiriti contemplativi). Arriviamo infine all'Ottavo cielo, quello delle Stelle Fisse, in cui Dante viene esaminato intorno alle virtù teologali. E qui inizia ad essere necessaria un'analisi più dettagliata dei canti. Siamo più precisamente nel XXVII canto del Paradiso. Dopo una delle più intense tra le invettive che Dante lancia nel suo poema (e non a caso la pone in bocca allo stesso San Pietro) si presenta agli occhi del lettore una nuova, e stupenda, metafora di inversione.

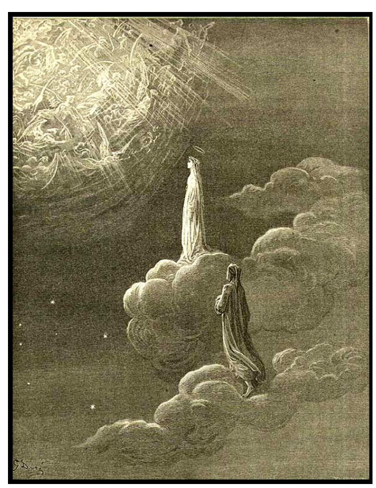
"Sì come di vapor gelati fiocca
<u>in giuso</u> l'aere nostro, quando'l corno
de la capra del ciel col sol si tocca,
<u>in su</u> vid'io così l'etera addorno
farsi e fioccar di vapor triunfanti"

(Par. XXVII, 67-71)

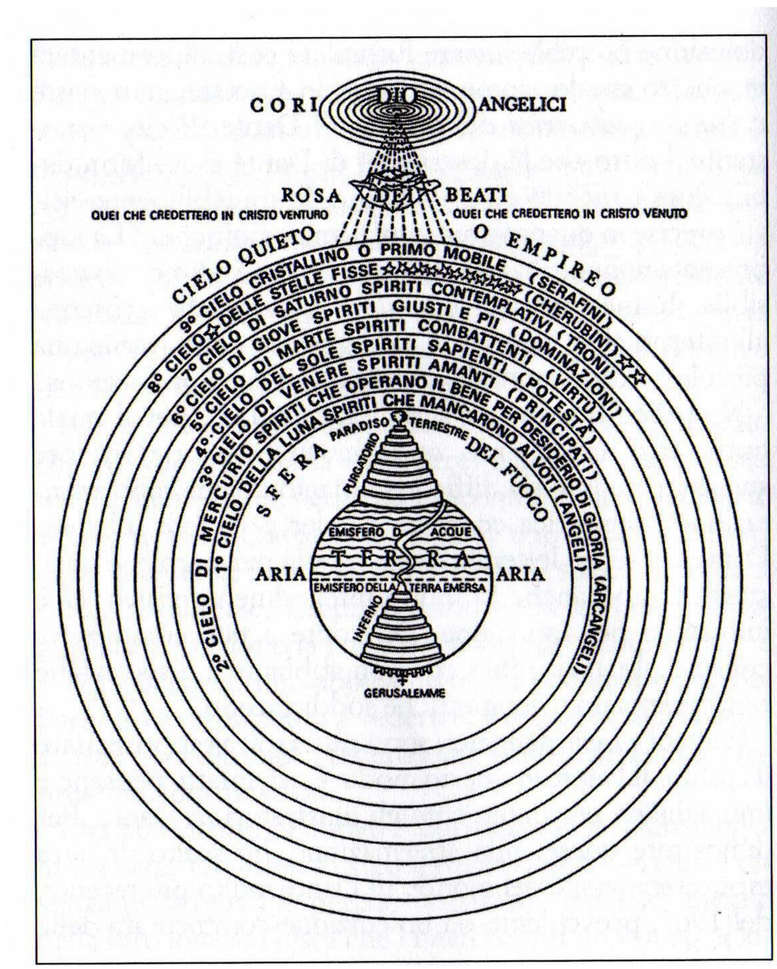
Le anime sembrano nevicare, ma verso l'alto! Dante si perde con lo sguardo a seguire questo movimento finchè Beatrice non lo invita a rivolgere lo sguardo verso il basso ("Adima il viso") e in questo verso la vista riesce a penetrare fino alla partenza del suo viaggio, la Terra, niente più che un' "aiuola". Ma ormai la mente di Dante ha abbandonato la dimensione terrena, è la mente innamorata che non può che risollevare lo sguardo e posarlo su quello della sua donna. E' l'ultima e più intensa celebrazione di Beatrice quella che le dona in questi versi, ma la virtù che la donna infonde in Dante è anche quella che gli permette di essere "divelto" dall'ottavo cielo e ascendere al Nono cielo, o Cielo cristallino. Come viene descritto questo cielo da Dante? "Ciel velocissimo", trasparente. Se nell'Ottavo cielo Dante si trovava in un punto ancora ben definito, la costellazione dei Gemelli, o "il bel nido di Leda" come ci suggerisce poeticamente, ora lo spazio è tanto omogeneo e uniforme da non poter più trovare nessun punto di riferimento spaziale per orientarsi. E in effetti, come spiega immediatamente Beatrice, "questo cielo non ha altro dove che la mente divina". E' nel Cielo Cristallino che hanno origine il movimento e il tempo. Tutti i movimenti infatti "son mensurati da questo, sì come diece da mezzo e da quinto" (e ci capita qui di citare un altro passo matematico, che prima non abbiamo avuto occasione di analizzare più dettagliatamente). Più interessante a questi fini è però l'immagine del Tempo: un albero, metaforicamente, che affonda le sue radici nel cristallino e sviluppa le proprie fronde negli altri Cieli. Un albero, dunque, capovolto. La neve, ricordiamo, che abbiamo visto cadere "in su". Pare che ci stiamo apprestando a un nuovo cambiamento di prospettiva, a un nuovo centro gravitazionale dell'universo. Ma nel canto XXVII Beatrice ci dà anche un'altra importante indicazione riguardo a ciò che aspetta Dante oltre il nono cielo: l'Empireo.

"*Luce ed amor d'un cerchio lui comprende*
sì come questo li altri"
(Par. XXVII 112-113)

L'Empireo, ovvero, cinge il Cristallino così come il Cristallino cinge gli altri cieli. L'Empireo è compreso solo dalla mente divina ed è il luogo della seconda cesura dell'Universo dantesco, quella che separa le cose corporee e visibili da quelle incorporee e invisibili. La terza cesura, tra creatura e creatore, non potrà essere attraversata razionalmente dalla vista di Dante, che dovrà affidarsi al "folgore", all'illuminazione della grazia divina. Ma torniamo al passaggio da cielo cristallino ad Empireo. Sono due le descrizioni che Dante ci lascia dell'Empireo, diverse in funzione delle capacità percettive di Dante in diversi momenti: la prima di esse la possiamo trovare nel canto XXVIII. Siamo ancora nel Nono Cielo e lo sguardo di Dante si perde ancora in quello di Beatrice. E proprio negli occhi della donna amata, come in uno specchio, il pellegrino scorge un punto luminoso. Voltatosi, per verificare la realtà della sua visione, a Dante si presenta il medesimo punto, luminoso di una luce potentissima, cinto in rapida sequenza da nove cerchi concentrici, velocissimo quello di raggio minore e via via più lenti sino all'immobilità dell'Empireo. Gli ultimi erano così estesi in larghezza, che già per il settimo dice che "il messo di Iuno intero a contenerlo sarebbe arto". La mirabile simmetria con i nove cieli del mondo visibile è colta dallo stesso pellegrino, che pure resta bloccato dal dubbio. Come mai nel mondo visibile i cieli sono tanto più veloci quanto più si allontanano dal centro, mentre nel mondo invisibile pare avvenire l'esatto contrario? Beatrice svela facilmente il mistero: la dimensione dei cieli fisici dipende strettamente dal grado maggiore o minore di virtù che si diffonde in essi, e che quindi possono contenere. Maggiore è la forza della virtù, e quindi dell'amore che li spinge, maggiore è la loro velocità. Per i cori angelici, cerchi immateriali concentrici che ruotano intorno al luminosissimo punto che è Dio, la virtù non è più in dipendenza dalla dimensione, bensì dalla maggiore o minore vicinanza a Dio stesso. Il più vicino a Dio è quello che si muove più velocemente e che "corrisponde" al più lontano dei cieli materiali: il Cristallino. Se Dante

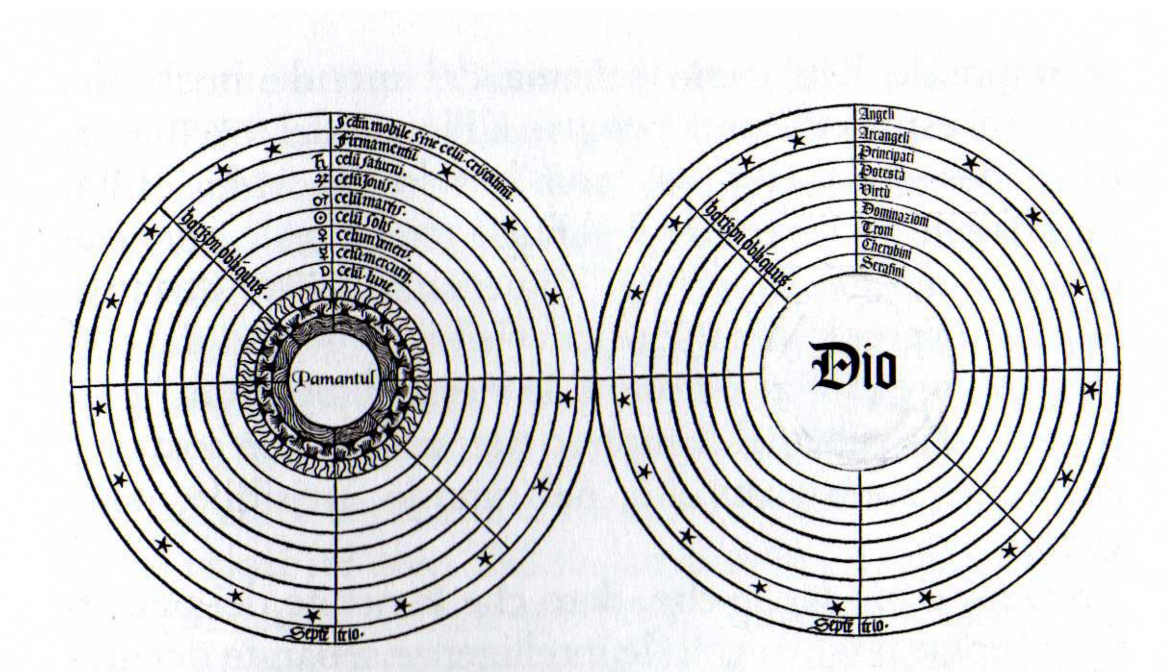


sostituirà alla scala di dimensioni la scala delle virtù potrà verificare la perfetta armonia e simmetria dell'Universo. Ancora un'"inversione, dunque. Per concludere, la seconda immagine che Dante ci dà dell'Empireo è un'immagine che va oltre la vista umana. Dante nel XXX Canto ascende all'Empireo e la sua vista diventa sempre più in grado di penetrare i misteri del divino. Le visioni che presenta non sono più ancorate alla cosmologia umana: un fiume di luce, le cui rive si colorano di mille fiori, scintille luminose vanno continuamente dal fiume ai fiori; una candidissima rosa, il cui centro dorato è Dio, i petali che lo circondano i Beati in adorazione. Sono queste immagini accessibili soltanto alla mente "imparadisata". Sono immagini anche che non possono essere funzionali alla razionale e più "cieca" raffigurazione dell'Universo che qui vogliamo costruire.
Detto, molto in sintesi, tutto ciò, abbiamo gli strumenti necessari per domandarci come sia rappresentabile visivamente e, sì pure, "geometricamente" questo Universo. Secondo Patapievici, ma in questo l'opinione è condivisa da molti, la rappresentazione abitualmente data dai libri di testo non è del tutto soddisfacente. Ne riporto una recente, ma conforme alle più tradizionali raffigurazioni dell'Universo dantesco, eseguita da G.Giacalone.



Dante Alighieri, *La Divina Commedia*, a c. di G. Giacalone, Angelo Signorelli Editore, Roma 1967, *Paradiso*, p. 2.

L'immagine appare molto chiara: al centro si vedono la Terra e il percorso dantesco dall'imbuto infernale al monte del Purgatorio, intorno alla Terra, quali sfere concentriche, si susseguono correttamente i nove cieli materiali. Fino a qui la rappresentazione è fuori discussione. Bisogna però ammettere che il completamento dell'Universo dantesco, vale a dire la rappresentazione dei nove cori angelici concentrici che racchiudono Dio, lascia qualche perplessità. Come abbiamo potuto vedere Dante ha descritto con mirabile attenzione un Universo perfettamente ordinato e simmetrico, fatto di parallelismi ed inversioni. Le stesse due zone (quella sensibile e quella angelica) sono simmetriche per il numero delle sfere, in stretta corrispondenza. In tutte le rappresentazioni dell'Universo dantesco tuttavia, per utilizzare le parole colorite dello stesso Patapievici, i cori angelici e lo stesso Dio risultano una sorta di "escrescenza asimmetrica, goffamente aggiunta al corpo simmetrico e bello del cosmo greco", "una coroncina da laureato compunto sullo zuccone del mondo". I due nuclei di sfere concentriche risultano separati e dislocati casualmente in uno spazio male definito, un modello cosmologico quanto meno improbabile, che fa a pugni con la tensione alla bellezza e all'armonia della descrizione dantesca. Immaginiamolo per un momento tridimensionalmente, come effettivamente dovrebbe essere: l'immensa sfera del cristallino che contiene tutte le altre e appuntata su un punto non ben preciso di questa una pallina contenente le sfere angeliche e Dio! Senza contare che Dante stesso si sofferma sulle dimensioni grandiose dei cori angelici (ricordiamo il paragone con l'arcobaleno citato precedentemente). Si potrebbe a questo punto pensare a un semplice errore di dimensioni, che riducono a oggettino trascurabile Dio stesso e proporre una variante di questo tipo alla più tradizionale rappresentazione del cosmo dantesco. Riporto qui un disegno realizzato dallo stesso Patapievici.[5]



[5] Per realizzarla Patapievici ha sfruttato un'immagine tratta dal *Catalogus gloriae mundi* di Barthelemy Chasseneux, modificandola in base alla propria interpretazione. Gran parte dei termini utilizzati è in lingua romena. (es. Pamantul=terra, etc..)

In questo modo nel passaggio dal Nono Cielo all'Empireo si procede da un sistema a nove sfere geocentrico (o potremmo dire diavolocentrico se è vero che al centro della terra è conficcato Lucifero) a un sistema, del tutto simmetrico al primo, di nove sfere teocentriche. Dato che le orbite dei pianeti sono mosse dai cori angelici, il loro movimento non avviene per *contactus corporis*, ma per *contactus virtutis*, come del resto sosteneva già Tommaso d'Aquino. Per la verità si potrebbe avanzare qualche critica anche a questa rappresentazione: le due sfere piene e in movimento paiono infatti, per così dire, nuotare in una massa immobile, luminosa e indefinita: l'Empireo, senza una precisa collocazione in questo. D'altra parte, come lo stesso Dante ci dice riguardo all'Empireo, "*colui che'l cinge solamente intende",* ovvero l'Empireo è compreso solo dalla mente divina. Potremmo accontentarci, ammettere la nostra inferiorità e fermarci qui. Patapievici si è divertito a giocare ancora un po' con questo misterioso Universo dantesco e a dargli una struttura geometrica, che con i mezzi matematici moderni, possa rispondere appieno alle esigenze di armonia e simmetria.
Il problema fondamentale, come abbiamo capito, è la raffigurazione dell'Empireo.

"Luce e amor d'un cerchio lui comprende"
(Par. XXVII, 112-113)

Dante ci dice che l'Empireo cinge circolarmente il cielo cristallino e tutti gli altri cieli fino alla terra, che ne costituisce il centro. D'altra parte abbiamo visto che l'Empireo ha una struttura ancora a sfere concentriche con centro Dio stesso. La situazione pare paradossale: teologicamente il paradosso è quello della divinità che è sia centro assoluto che contenitore assoluto della creazione, geometricamente nell'ambito dello spazio euclideo ci troviamo di fronte ad un'aporia. Sarebbe come dire che l'universo è fatto da sfere concentriche, sempre più grandi via via che ci allontaniamo dalla Terra, le quali però oltrepassato un certo limite (il Primo Mobile) incominciano a diventare sempre più piccole fino a convergere intorno a un altro punto, che non è la Terra... come è possibile? Nel disegno di Patapievici le sfere sono rappresentate tangenti in un solo punto (e altro il povero disegnatore non avrebbe potuto fare su un foglio di carta), per la nostra struttura avremmo bisogno che le due sfere fossero tangenti in tutti i loro punti contemporaneamente. Nelle tre dimensioni tutto ciò pare impossibile, ma con uno sforzo di immaginazione ci renderemo conto che in uno spazio pluri-dimensionale questa struttura è geometricamente non solo esistente, ma di perfetta armonia come la sfera nella nostra concezione. Per capire tutto ciò immaginiamo per un istante di abbandonare il nostro spazio tridimensionale e di "spalmarci" sulla bidimensionalità di un foglio di carta. Pensiamo di scontrarci e passare attraverso una sfera tridimensionale. Appena la sfera sfiorerà il foglio essa sarà tangente alla superficie in un solo punto, via via che attraverserà il foglio vedremo delle circonferenze che crescono fino a raggiungere il circolo massimo, l' "equatore" della nostra sfera, superato il quale le circonferenze di "intersezione" tra la sfera e il foglio di carta andranno via via diminuendo di raggio fino a ridursi ad un solo punto. La stessa cosa la possiamo comprendere se immaginiamo di rappresentare la Terra attraverso gli infiniti paralleli che si possono tracciare su di essa. Guardando ad esempio dal Polo Sud vedremo un punto che è il polo Sud stesso e via via una serie di paralleli di raggio sempre maggiore fino all'Equatore, e quindi la stessa cosa al contrario. L'Equatore insomma contiene "concentricamente" due successioni diverse di circonferenze con due centri diversi (i due poli). A questo punto non sarà più così assurdo immaginare, con una dimensione in più, una struttura quadrimensionale, che nella nostra prospettiva tridimensionale possiamo rappresentarci solo tramite due successioni di sfere concentriche. Questa, che ho descritto volutamente in termini amatematici e ascientifici, è quella che in geometria è chiamata IPERSFERA.

Dante sicuramente non volle descrivere un'ipersfera, ma l'ipersfera descriverebbe bene la perfetta e armoniosa simmetria del cosmo dantesco.

"A l'alta fantasia qui mancò possa"

Horia-Roman Patapievici ha raccontato queste sue "fantasie" dantesche in occasione della conferenza "L'universo curvo di Dante", l'8 Settembre 2006, nella X edizione del Festival della Letteratura di Mantova. Quello che ha trasmesso in primo luogo è stato un amore per l'opera dantesca sorprendente perchè letta in una lingua che non è la propria, sorprendente perché da parte di un docente di Fisica. Ha concluso la conferenza svelando un piccolo segreto: qualche volta abbandona i misteri delle equazioni che costituiscono le chiavi del nostro Universo e legge la poesia di Dante, sognando di trovarvi le medesime cose, solo più immaginifiche, più poetiche. Noi abbiamo finora costruito le geometrie dell'ipersfera e la configurazione del nostro Universo attraverso i variegati versi poetici, con un percorso contrario cerchiamo di leggere il medesimo mondo dietro alle formule e ai numeri matematici. E vediamo se riusciremo a trovare un po' di poesia anche in essi.

LA NOSTRA VITA IN UN UNIVERSO CURVO

Le Geometrie Non Euclidee

Il termine "geometria non euclidea" è stato utilizzato per la prima volta da Gauss nel 1824 ad indicare un sistema geometrico per la prima volta differente da quello introdotto da Euclide e da sempre considerato l'unico matematicamente accettabile e inattaccabile per l'indubbia potenzialità intuitiva ad esso connessa. Nessuno, in altre parole, avrebbe potuto immaginare una geometria diversa da questa, che realizzava effettivamente una fedele descrizione della realtà, così come appare a noi. E tuttavia già dall'antichità alcune delle basi su cui il sistema si fondava avevano destato sospetti, non tanto riguardo alla loro verità (che continuava ad essere ritenuta inconfutabile), quanto sulla correttezza matematico-deduttiva della loro enunciazione.

La geometria euclidea

Il primo libro degli Elementi di Euclide[6] comprende la maggior parte dei principi su cui l'opera intera è basata. Tali principi si dividono in tre categorie: definizioni (ὅροι= termini), postulati (αἰτήματα= richieste) e nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι).
Tralasciando in questa sede le pur interessanti definizioni e nozioni comuni, ricordiamo rapidamente i 5 postulati, che Euclide ritenne necessario premettere alla propria trattazione.

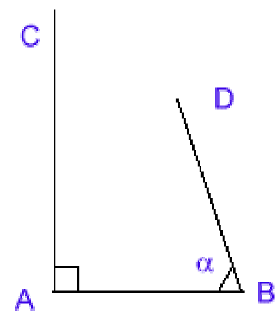
1) "*Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da qualsiasi punto ad ogni altro punto*"
2) "*E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta*"
3) "*E che si possa descrivere un cerchio con un qualsiasi centro ed ogni distanza*"
4) "*E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro*"
5) "*E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti*".

E' facile notare immediatamente come, se i primi quattro rispettano senza problemi il criterio di immediata intuibilità proprio dei postulati, il quinto si presenta in forma più complessa, si direbbe quasi un teorema. Forse se ne accorse lo stesso Euclide, che non ne fece uso fino alla 29esima proposizione da dimostrare, quando, falliti tutti i tentativi di dedurlo dagli altri quattro, il grande matematico greco si trovò nella necessità di porlo come postulato.

.

[6] Il titolo Στοιχεῖα (=elementi) ci dice molto della natura dell'opera stessa. Il termine ha la stessa radice del verbo στείχω (*steigh: salire, camminare): una serie di atti minimi, elementi dell'azione del muoversi. Euclide realizza in essi una delle opere più importanti della matematica di tutti i tempi, costruendo passo a passo su basi strettamente deduttive l'intero sistema geometrico e aritmetico della matematica allora conosciuta. Composti intorno al 300 a.C., constano di 13 libri: i primi 6 riguardanti la geometria piana, tre sulla teoria dei numeri, il decimo libro sulla teoria degli incommensurabili e gli ultimi tre sulla geometria solida. Ancora oggi costituiscono la base fondamentale dell'insegnamento elementare della geometria.

Ma cosa dice in sostanza il celebre V postulato?
Prendiamo due rette AC e BD tagliate dalla trasversale AB, in modo tale che AC sia perpendicolare ad AB e che l'angolo α < 90°. Basandoci sulla nostra esperienza potremmo ipotizzare senza problemi che AC e BD si incontreranno proprio dalla parte in cui formano angoli coniugati interni la cui somma è minore di 180°. E questo è il V postulato di Euclide.



Per la verità, anche se il fatto ci appare quasi immediatamente intuibile, esso non può in tutti i casi essere verificato in una porzione finita di piano. Perde pertanto il carattere di postulato e necessiterebbe di una dimostrazione. Tentativo questo, che ha fatto sudare sette camicie ai matematici di ogni tempo. Invano.

Le tentate dimostrazioni del V postulato

"Porro nemo est qui dubitet de veritate expositi Pronunciati…"
[Nessuno dubita della verità del V postulato…]

Gerolamo Saccheri, 1733

Nessuno dubitava, ma tutti avvertivano la necessità di lavare il perfetto impianto logico dell'opera euclidea dall'imbarazzante macchia.
L'approccio al problema poteva seguire diverse vie:

I. Cercare una dimostrazione, nella convinzione che potesse essere un teorema deducibile dai primi 4 postulati.
II. Cercare di sostituire la nozione di "parallelismo" (semplice solo in apparenza) con una più evidente
III. Lasciare inalterata la nozione di parallelismo, cercando un enunciato equivalente a quello di Euclide, ma più adatto ad essere assunto come postulato

Proclo Diacono[7] riporta vari tentativi di dimostrazione del postulato, scoprendo che di fatto in essi viene utilizzato un enunciato equivalente. Il più celebre, più facile della formulazione euclidea, ma non meno problematico, è quello che viene anche attualmente insegnato nel corso dei primi approcci alla geometria:

<u>"Dati in un piano una retta e un punto fuori di essa, esiste ed è unica la retta parallela alla data e passante per il punto"</u>

Anche i matematici del mondo arabo si interessarono al problema, in particolare **'Omar Khayyam**[8] non tenta una dimostrazione, ma cerca un enunciato più intuitivo:

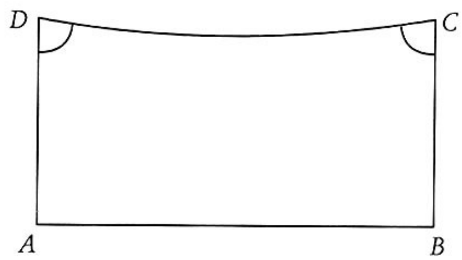
"Se due rette si avvicinano, allora si intersecano in un punto"

---

[7] filosofo neoplatonico del V secolo d.C. e commentatore dell'opera di Euclide
[8] Khayyam fu tra l'altro, oltre che matematico e astronomo, poeta e filosofo. Autore in particolare di famose quartine poetiche, *Rubaiyat*, scoperte nell'Ottocento.

In altri termini, nel caso delle rette non possono presentarsi fenomeni asintotici, come per altre curve che si avvicinano sempre più senza mai incontrarsi.

Potrebbero essere elencati molti altri tentativi, tutti tra l'altro fallimentari, ma il più interessante ai fini della nascita delle geometrie non euclidee è quello di **Girolamo Saccheri** (1667-1733). Il gesuita, fermamente convinto della verità del postulato delle parallele, si inoltrò in studi che l'hanno reso il primo inconsapevole fondatore delle geometrie non euclidee. Nel suo celebre lavoro del 1733, *"Euclides ab omni naevo vindicatus"* tenta di emendare da ogni neo l'opera, attaccando il quinto postulato *a contrariis*, ovvero per assurdo.
Saccheri considera in particolare il quadrilatero che si ottiene alzando due perpendicolari AD e BC, di uguale lunghezza e dalla stessa parte, agli estremi di un segmento AB e chiudendo poi la figura con il lato superiore CD.



La figura così ottenuta è nota come "quadrilatero birettangolo isoscele"
E' facile dimostrare l'uguaglianza degli angoli in C e in D, semplicemente considerando dapprima i triangoli ABD e CBA, quindi i triangoli ADC e BCD, rispettivamente uguali tra loro. Ma tali angoli saranno anche retti?

Secondo il postulato di Euclide sì. Le altre due possibilità sono naturalmente che gli angoli in C e in D siano entrambi acuti o entrambi ottusi, Saccheri si propone di dimostrare l'assurdità di queste due ultime ipotesi e in questo modo guadagnarsi la tanto agognata dimostrazione del V postulato. Per quanto riguarda l'angolo ottuso riesce nell'intento (anche se, come vedremo, in un opportuno sistema geometrico anche questa ipotesi sarà ripresa dalle geometrie non euclidee). A partire dall'ipotesi dell'angolo acuto invece giunge a dimostrare numerosi risultati interessanti (e per questo è ritenuto precursore delle geometrie non euclidee), ma soprattutto non scopre alcuna contraddizione nel sistema geometrico che deriva dalla negazione del V postulato. Il che rese drasticamente evidente la non dimostrabilità del V postulato euclideo, sulla cui negazione poteva edificarsi un sistema geometrico logicamente valido.

Riemann e la geometria ellittica

"Non si accorgono di commettere una petizione di principio, assumendo ciò che non si potrebbe dimostrare se rette parallele non esistessero" Aristotele

Le due ipotesi di Saccheri furono riprese proprio nella fondazione delle due più importanti geometrie non euclidee, definite dai nomi dei loro fondatori: geometria iperbolica di Lobačevskij e geometria ellittica di Riemann.
Rispettivamente nascono dalla ripresa dell'ipotesi degli angoli acuti e da quella degli angoli ottusi di Saccheri. In questa sede ci interesseremo maggiormente alla seconda.

Bernhard Riemann riprese l'ipotesi dell'angolo ottuso, creando un nuovo sistema geometrico coerente, la sua dissertazione più famosa del 1854 "*Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*" è considerata uno dei più importanti testi di geometria non euclidea. La geometria di Riemann si fonda su un'asserzione principale:

"Due rette qualsiasi dello stesso piano hanno almeno un punto in comune"

In particolare è negata l'esistenza di rette parallele. Da dove si origina la teoria di Riemann e in che termini può essere coerente?
Innanzitutto il matematico si preoccupò di sottolineare la differenza tra il concetto di "illimitatezza" (relativo all'estensione, quindi qualitativo) e quello di "infinità" (relativo alla misura, quindi quantitativo). La retta secondo la geometria ellittica è illimitata, ma finita. Per aiutarci a capire immaginiamo di studiare la geometria, anziché sul piano, sulla superficie di una sfera. La geometria sferica per la verità esisteva già da anni, utilizzata ad esempio in ambito marittimo ed astronomico, ma è importante sottolineare che qui l'ottica è del tutto diversa. Una sfera è naturalmente un oggetto tridimensionale che noi possiamo concepire solo se immerso nello spazio tridimensionale; ma la superficie di una sfera è bidimensionale. Degli esseri bidimensionali potrebbero benissimo studiare la geometria di questo "mondo" bidimensionale. Questa è la geometria *intrinseca* della superficie, mentre la sua geometria *estrinseca* dipende dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio.
Ora, cerchiamo di definire il concetto di retta su una superficie bidimensionale sferica. Sappiamo che sul piano euclideo il percorso più breve che collega due punti A e B è il segmento di retta che li congiunge. Prendiamo ora due punti A e B su una superficie sferica.

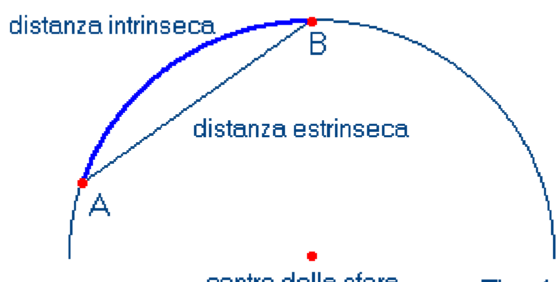


Fig. 4

E' evidente che da un'ottica estrinseca il percorso più breve è il segmento interno alla sfera. Ma da un punto di vista intrinseco il percorso più breve è un arco di circolo massimo. Nella geometria della sfera le rette sono proprio circonferenze massime, le cosiddette geodetiche.

Generalizzando, data una qualsiasi superficie Σ:

Diremo che una linea γ tracciata sulla superficie Σ è una ***linea geodetica*** se ogni arco **non troppo lungo** di γ, i cui estremi siano i punti A e B, è il percorso più breve da A a B tra tutti quelli tracciabili su Σ.

Ora immaginiamo che un essere bidimensionale si muova su una circonferenza massima, una geodetica. Dalla sua prospettiva bidimensionale non avvertirà la curvatura, gli apparirà di muoversi "in linea retta" su un percorso sì illimitato (potrà continuare a percorrerlo quanto vuole), ma tale per cui ripasserà sempre per il punto di partenza. E' proprio questa la retta illimitata e finita.

Consideriamo ora due rette su una superficie di questo genere: è evidente che esse si incontreranno sempre in due punti *agli antipodi.*

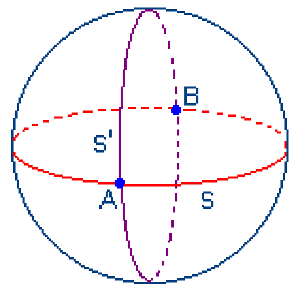


Fig. 2

In ugual modo **non possono esistere rette parallele**, vediamo in figura 3 un confronto tra il piano euclideo e il piano non euclideo sferico.

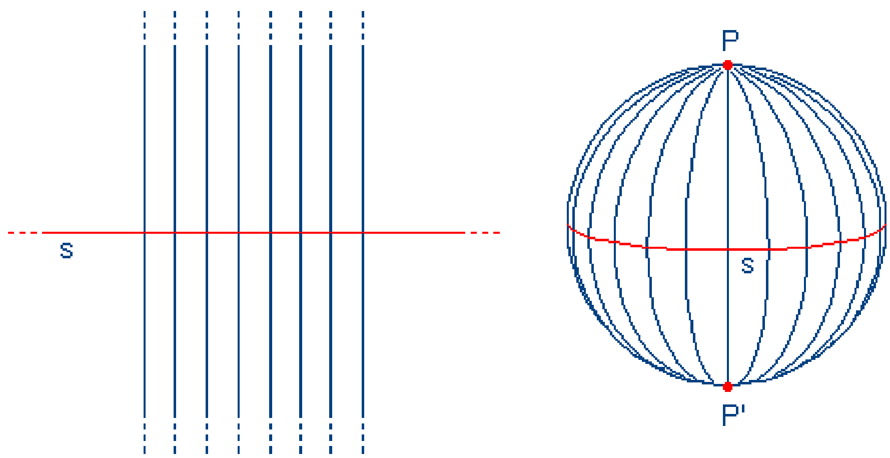
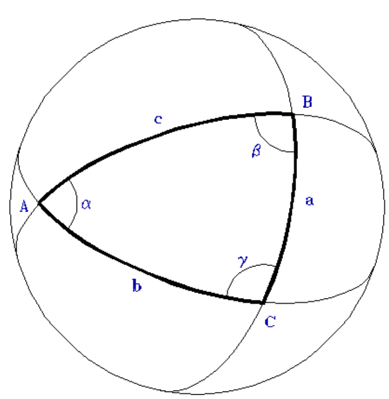


Fig. 3

La nuova geometria che possiamo studiare su una superficie di questo tipo forma una struttura del tutto coerente logicamente, con i propri teoremi e le proprie leggi. Se consideriamo ad esempio un triangolo "sferico" la somma dei suoi angoli interni è maggiore di 180°. Più precisamente si può dimostrare che l'area di una regione triangolare sulla sfera è esattamente la quantità di cui la somma dei suoi angoli interni supera i 180°.
Ovvero:



$$\underline{\alpha+\beta+\gamma = \pi+A}$$

Quella che abbiamo descritto finora per la verità non è ancora precisamente un modello di geometria ellittica. Abbiamo infatti detto che non sempre due punti determinano un unico arco di circonferenza massima, se assumiamo come due punti infatti i due poli, esistono infinite semicirconferenze che li congiungono, tutte della stessa lunghezza, in contrasto con il primo postulato. La geometria della sfera è un modello che ci permette di affrontare con maggiore familiarità la geometria riemanniana, ma non ancora preciso. Una soluzione sarebbe quella di eliminare metà dei punti della sfera e considerare un solo emisfero. In questo modo però le rette perderebbero anche la caratteristica di illimitatezza terminando bruscamente all'equatore, in contrasto con il concetto stesso di retta. Il modello più preciso di geometria ellittica prevede allora che metà dei punti dell'equatore COINCIDANO con gli altri punti dell'altra metà, a due a due. Ovvero, il punto dell'equatore che sta sul primo meridiano a 0° di longitudine è il medesimo di quello che sta a 180° di longitudine. Quando una semicirconferenza massima "termina" su un punto dell'equatore "salta" direttamente su quello diametralmente opposto e continua il suo circolo, illimitata e finita.

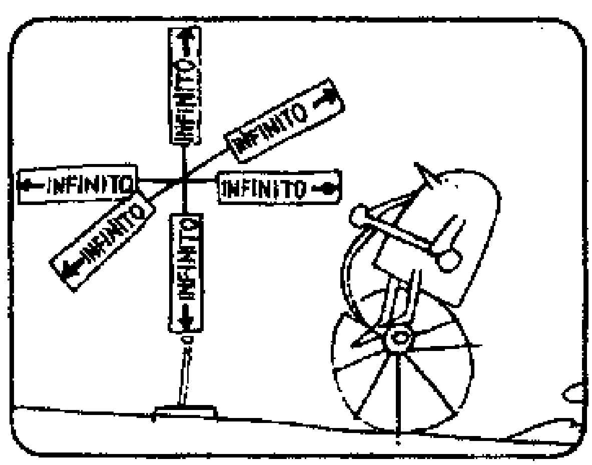
Nello spazio ordinario non è possibile unire effettivamente i punti da identificare, poiché la superficie risultante dovrebbe autointersecarsi pur lasciando distinti i punti di intersezione. Si dimostra che una superficie rispondente alla geometria ellittica deve per forza essere chiusa, a curvatura positiva. Per il teorema di Liebmann però:

<u>Nello spazio euclideo a tre dimensioni l'unica superficie chiusa, a curvatura positiva costante, priva di singolarità è la sfera.</u>

Non è possibile raffigurarci un modello di geometria ellittica nel nostro mondo, ma nel mondo delle quattro dimensioni sì. La superficie chiusa, a curvatura positiva, a quattro dimensioni che stiamo cercando è l'**ipersfera**.

Conclusioni

Ci si potrebbe a questo punto domandare le ragioni di tutti questi discorsi. Qual è la consistenza di un modello geometrico perfettamente coerente in sé, ma che rifugge da tutte le esperienze della nostra vita quotidiana? Torniamo per un attimo all'analogia con quegli essere bidimensionali, che vivono spiaccicati su un piano. Se il piano in cui essi vivono fosse incurvato, una sfera diciamo, abbiamo visto come in base alle misurazioni della loro geometria *intrinseca* non potrebbero rendersene conto. Molto piccoli rispetto alla curvatura complessiva, i triangoli della loro esperienza quotidiana avrebbero somma degli angoli interni uguale a 180° e alcune rette sarebbero da loro "apparentemente" considerate parallele. Potrebbero utilizzare nel loro piccolo una geometria di tipo euclideo. Muovendosi inconsapevolmente sulla sfera, il loro "mondo piano" gli apparirebbe infinito ed euclideo. Nessun punto potrebbe essere considerato il centro del loro mondo, nessuna zona la periferia. Non esisterebbero neppure contorni del loro universo. Osservandoli dall'alto delle nostre tre dimensioni a noi apparirebbe una verità *estrinseca* ben diversa: la loro ottica non



sarebbe altro che un caso particolare di un più generale mondo non euclideo ad una dimensione in più e finito. Come prima trasferiamo l'analogia ad una dimensione in più. Cosa accadrebbe se scoprissimo che il nostro mondo solido tridimensionale, apparentemente infinito ed euclideo, si rivelasse solo la nostra visione *intrinseca,* in quanto esseri tridimensionali, di una verità diversa? Il nostro universo sarebbe forse un'ipersfera in 4 dimensioni (quella di cui parlava Patapievici in relazione al mondo dantesco) con curvatura costante positiva. Sulle grandi (ma proprio grandi) distanze il postulato euclideo crollerebbe, nessun volume (diciamo nessuna galassia) potrebbe considerarsi al centro del nostro universo, non esisterebbe nessun confine, senza tuttavia doverlo per questo considerare infinito. Semplicemente partendo da un punto nello spazio e viaggiando su una traiettoria rettilinea molto molto a lungo…torneremmo al punto di partenza.
Un'altra analogia interessante è la seguente: immaginiamo un cerchiolino molto piccolo sulla superficie sferica che inizia via via ad ingrandirsi, raggiungerà la circonferenza massima (ma lui non se ne renderà conto) e continuerà ad espandersi fino a collassare in un punto. Aumentando di una dimensione la stessa analogia potrebbe verificarsi per l'universo quadridimensionale. Cosa sia questo punto poi, non è dato saperlo.
I condizionali, per la verità, utilizzati in questa pagina sono stati forse un po' troppo numerosi. Parole intellettualmente affascinanti, ma davvero applicabili alla realtà? Un uomo abbastanza coraggioso e fantasioso, chiamato Albert Einstein, ci risponderebbe che sì, è possibile.

L'Universo nella Relatività Generale

> *"Non è l'angolo retto che mi attira. Neppure la linea retta, dura, inflessibile, creata dall'uomo. Quello che mi attira è la linea curva, libera e sensuale. La linea curva che ritrovo nelle montagne del mio paese, nel corso sinuoso dei suoi fiumi, nelle nuvole del cielo, nel corpo della donna amata. L'universo intero è fatto di curve. L'universo curvo di Einstein ......"* (Oscar Niemeyer[9])

Il modello cosmologico, che Einstein ha presentato nella sua Teoria della relatività generale il 4 Novembre del 1916 all'Accademia Prussiana e che più o meno ancora oggi è considerato modello dell'Universo su larga scala, riprende sorprendentemente le strutture geometriche proposte da Riemann.
Vediamo innanzitutto in sintesi il contenuto e la portata di questa teoria rivoluzionaria.
La teoria della relatività generale estende le leggi della relatività ristretta[10] anche ai sistemi non inerziali. La logica concettuale della relatività generale è fondamentalmente espressa dal principio di equivalenza.

---

[9] Architetto brasiliano, amò applicare forme fluide e curve alle strutture degli edifici da lui realizzati, in alternativi alla rigidità della linea retta.

[10] I due postulati fondamentali della Relatività Ristretta sono:
- Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali
- La velocità della luce nel vuoto è c=3,00 x 10^8 m/s in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal moto della sorgente rispetto all'osservatore.

"Ogni sistema di riferimento inerziale, immerso in un campo gravitazionale uniforme, è del tutto equivalente a un sistema di riferimento uniformemente accelerato (rispetto al primo) nel quale non agisca alcun campo gravitazionale"

In modo del tutto equivalente potremmo dire che la massa inerziale (costante di proporzionalità fra la forza applicata e l'accelerazione impressa ad un corpo) e la massa gravitazionale (proprietà posseduta dai corpi dalla quale traggono origine le forze gravitazionali) sono del tutto equivalenti. Questa equivalenza, inoltre, riguarda non solo i fenomeni meccanici, ma tutti i fenomeni fisici. Le conseguenze di questa osservazione sono sorprendenti: in primo luogo risulta evidente che in questo modo la teoria della relatività diventa anche una teoria della gravità.
Nella concezione relativistica infatti la realtà fisica è formalmente descritta da uno spazio a quattro dimensioni, in cui la quarta è rappresentata dal tempo. Un evento è rappresentato da un punto del cronotopo, individuato dall'insieme delle coordinate x,y,z e t. In uno spazio di questo genere non c'è più bisogno di una forza gravitazionale. La gravità, infatti, diventa una proprietà geometrica dello spazio-tempo. La presenza di un oggetto dotato di massa nell'Universo di Einstein modifica le proprietà geometriche dello spazio quadridimensionale, tendendo a incurvarlo. Viceversa, una curvatura del cronotopo einsteniano sta a indicare la presenza di un campo, la cui sorgente è una massa.
In altre parole più un oggetto e denso, più in quel punto lo spazio sarà "spigoloso", come se fosse una pallina su un lenzuolo.

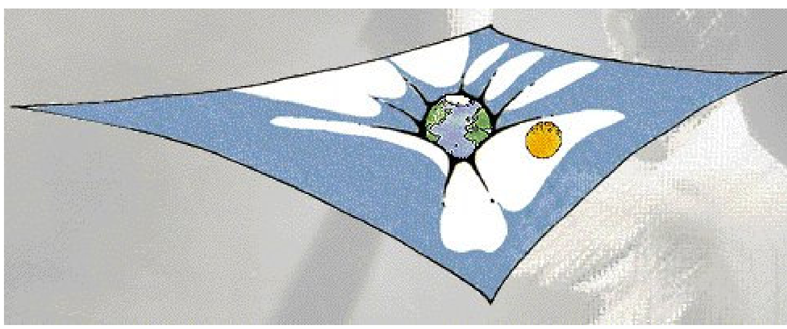
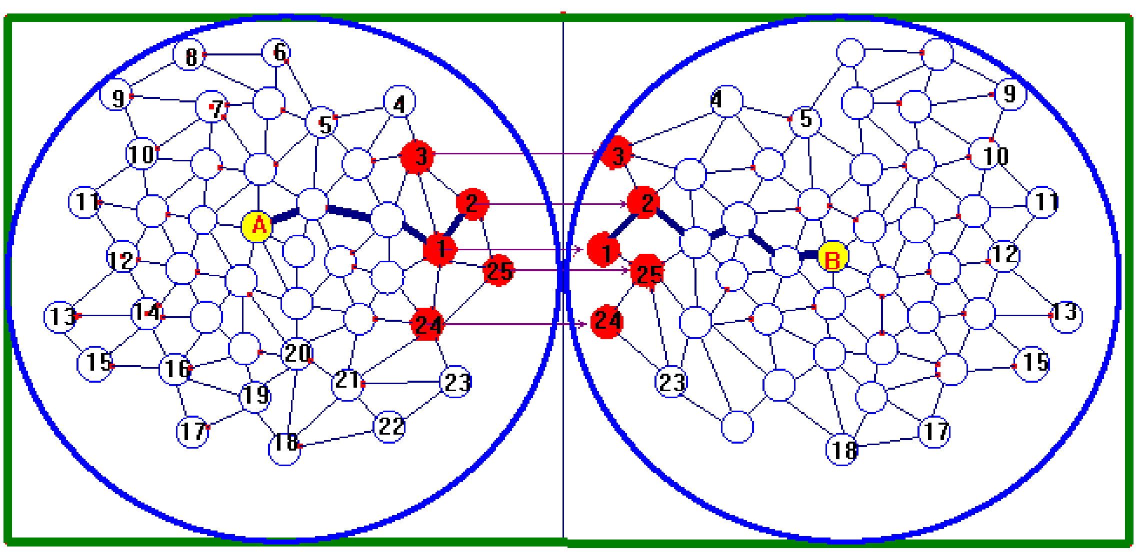


fig.[11]

Tale curvatura influenza la dinamica degli oggetti: quando un corpo entra in un campo gravitazionale, si muove come una particella libera lungo la traiettoria più breve possibile: la geodetica dello spazio-tempo, vale a dire il corrispondente della retta nel nostro universo curvo. Nello stesso modo se consideriamo due masse puntiformi, nessuna delle due esercita una forza sull'altra (come avviene nella meccanica classica), entrambe però incurvano lo spazio e tendono a muoversi su due linee geodetiche che tendono ad avvicinarsi, ma solo a motivo della curvatura dello spazio.
I buchi neri sarebbero casi limite di questa situazione: di densità molto vicina all'infinito, le "pareti" del lenzuolo tendono ad essere quasi parallele.
La prima conferma di questa teoria è derivata dall'osservazione che anche la luce dovrebbe essere deflessa passando vicino a campi gravitazionali prodotti da masse molto grandi. Nel 1921, durante un'eclissi di Sole, è stato effettuato un esperimento che ha

[11] L'immagine è tratta da "La relatività di Einstein" di Tullio Regge

mostrato come un raggio luminoso proveniente da una stella lontana, passando vicino al Sole, subisce una leggera deviazione per effetto del campo gravitazionale. Il nostro Universo, insomma, può essere rappresentato da uno spazio quadridimensionale, curvo, la cui geometria è di tipo non euclideo. Ma con tale modello Einstein risolve anche un altro problema da sempre dibattuto nei secoli. I filosofi dapprima, e poi gli scienziati, si sono interrogati sulla quantità di materia presente nell'Universo, se in definitiva si trattasse di una quantità finita o infinita. La risposta aristotelica (e che quindi rimase dominante ampiamente anche nell'Europa medievale e oltre) era l'indubbia affermazione di un Universo finito. L'obiezione che sorge spontanea a questa posizione è la seguente: se l'Universo è finito, deve avere un confine, una sorta di contorno che lo delimiti. Ma anche l'esistenza di questo contorno appare piuttosto difficoltosa da accettare concettualmente. La rappresentazione dell'Universo einsteniano è proprio una conciliazione di queste posizioni. Ricordate la distinzione operata da Riemann tra illimitato e infinito nella descrizione della sua geometria? La situazione è piuttosto simile. L'Universo einsteniano, una sorta di ipersfera quadridimensionale, è omogeneo e isotropo (la sua costituzione è uniforme), nessun punto può ritenersi al centro di esso, nessun altro alla periferia. Costituito da un numero FINITO di galassie, esse sono disposte sulle quattro dimensioni in modo tale da avere un volume illimitato. In altre parole non troveremo mai un confine del nostro universo, al massimo se potessimo andare abbastanza lontano.. torneremmo al punto di partenza! Come potremmo rappresentare una struttura di questo tipo? Un adattamento proposto è stato il seguente:

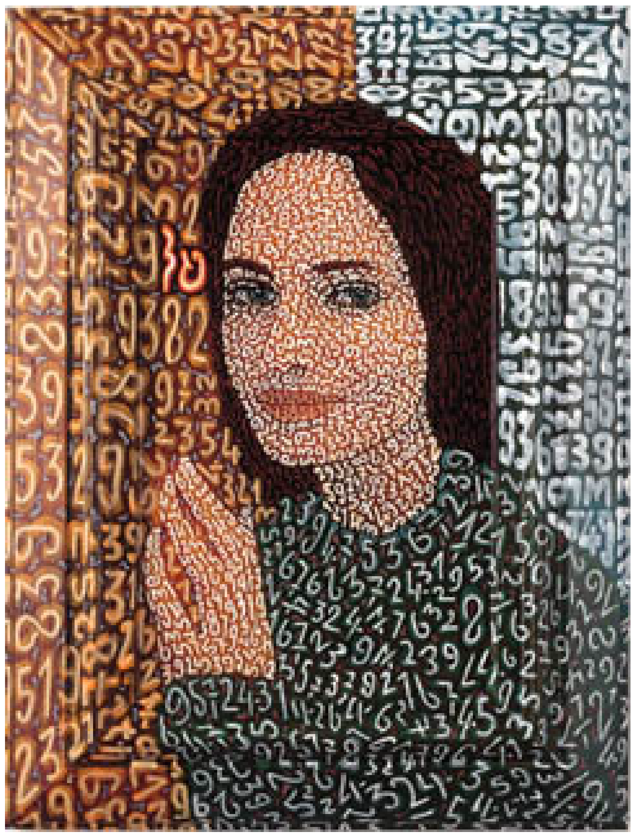


I cerchietti disegnati raffigurano le galassie e la rappresentazione non è in scala (impossibile nella nostra ottica tridimensionale). Come si può notare il modello è costituito da due parti apparentemente sconnesse e ognuna con un centro e un contorno. In realtà, sebbene sembri che alcune galassie non posseggano vicine da tutte le parti, non è così: se

osserviamo bene ogni galassia appare almeno in una delle due parti, ma TUTTE quelle di confine appaiono in entrambe. In questo modo ogni galassia di confine è completamente circondata da galassie: metà di una parte e metà dell'altra, eliminando ogni discontinuità.
Ma allo sguardo attento non sarà sfuggito che questa altro non è che la rappresentazione (nei limiti delle tre dimensioni) proprio dell'ipersfera riemanniana!
Ma facciamo un ulteriore passo indietro e confrontiamola con la rappresentazione di Patapievici dell'Inferno dantesco di pag.23 Se sostituiamo mentalmente alle galassie di bordo che si ripetono l'Empireo dantesco che "abbraccia" le due parti del mondo, l'analogia è davvero sorprendente… e il cerchio (o l'ipersfera se preferite) si chiude.

Altre esperienze di confine

Un excursus tra passato e presente



Tobia Ravà, *Goccia di rugiada*, 2001

«La forza che muove l'invenzione matematica non è il ragionamento ma l'immaginazione.»

Augustus De Morgan

I POEMI DIDASCALICI: QUANDO LA SCIENZA PARLA IN VERSI

Considerazioni sul genere didascalico e il suo sviluppo

Il genere didascalico sin dall'antichità comprendeva tutte quelle opere *letterarie*, in *versi*, che si ponevano come fine primario la divulgazione di determinate conoscenze o precetti, anche (ma non solo) di tipo scientifico.
Prima di entrare nello specifico dei singoli lavori, sarà opportuno premettere un paio di riflessioni indispensabili perché il lettore moderno non interpreti in maniera fuorviante la trattazione. Sarà in particolare necessario spiegare cosa gli antichi intendessero per "scienza" in senso generale e quale sia la scienza dei poemi didascalici. Le conclusioni, se ridurranno da un lato la portata "scientifica" (in senso moderno) delle opere da trattare, saranno tuttavia funzionali anch'esse agli obiettivi prefissi dal lavoro, restituendo un'immagine della scienza del tutto inattesa.
Ritengo di poter suddividere il discorso in due fasi fondamentali, aventi come discrimine l'Ellenismo e gli straordinari cambiamenti che esso comportò nella civiltà greca.
Nell'antichità scienza e filosofia erano pressochè inscindibili: nate dalla formulazione dei medesimi interrogativi, percorrevano anche strade parallele, se non coincidenti, nella ricerca delle risposte. La situazione rimarrà invariata per molti secoli, fatto tra l'altro nemmeno troppo singolare, se si pensa che il campo di ricerca della filosofia alla sua nascita investiva totalmente il mondo fisico che ci circonda e le sue origini. Non a caso insomma possiamo parlare di *filosofia naturale*.
Cicerone nel De Oratore parlando di "ciò che i Greci chiamano filosofia"[12] cita ad esempio i matematici e le loro ricerche. E d'altra parte Pitagora, il più famoso matematico dell'antichità, era in primo luogo il maestro di una scuola filosofica, con connotati a tratti mistici e religiosi; sull'altro versante all'entrata dell'Accademia platonica la tradizione suggerisce che fosse incisa la frase "Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω", "Non entri chi non conosce la geometria". Sarà interessante notare inoltre che l'etimologia della parola matematica (dal greco μανθάνω= imparare) così come quella del latino scientia si ricollegano ad un concetto molto generale: quello della conoscenza.
Naturalmente in questa prima fase il più generico spazio di movimento delle scienze le condannava anche a un'approssimatività e a un metodo che di scientifico aveva ben poco, mentre aveva i tratti evidenti della riflessione filosofica, dell'indagine intellettuale. E' in questo contesto che collochiamo i primi poemi didascalici, dalle "Opere e i giorni" di Esiodo ai "Φυσικά" di Empedocle. Gli autori sono in questo caso filosofi-scienziati. Le conoscenze che riportano sono per lo più il frutto delle loro proprie indagini, anche in questo caso filosofico-scientifiche. Non possiamo insomma parlare di scienza come la intendiamo noi oggi, ma come l'intendevano gli antichi: una conoscenza razionale che permeava tutti gli ambiti dello scibile. Un concetto che rivela le vere radici comuni delle "due culture".

---

[12] Cic. *De Oratore* I,iii,9-10 "*Neque enim te fugit omnium laudatarum artium procreatricem quandam et quasi parentem eam, quam philosophiam Graeci vocant, ab hominibus doctissimis iudicari; in qua difficile est enumerare quot viri quanta scientia quantaque in suis studiis varietate et copia fuerint, qui non una aliqua in re separatim elaborarint, sed omnia, quaecumque possent, vel scientiae pervestigatione vel disserendi ratione comprehenderint. Quis ignorat, ei, qui mathematici vocantur, quanta in obscuritate rerum et quam recondita in arte et multiplici subtilique versentur?"*

L’Ellenismo comportò notevoli cambiamenti in tutti gli ambiti della civiltà greca e anche in questo. In primo luogo assistiamo a una nuova consapevolezza che la cultura può avere di se stessa. Le ragioni sono molto semplici e possono essere individuate nella nascita delle grandi biblioteche, che permettono per la prima volta un’organizzazione e sintesi del sapere fino ad allora “prodotto”. Questo fatto ha le sue conseguenze anche sulla scienza, che inizia ad emanciparsi dalla filosofia e a rendere sistematico il proprio sapere. E’ l’epoca degli “Elementi” di Euclide non a caso; la scienza, reciso il cordone ombelicale, diventa autonoma, rigorosa, specialistica. Ma l’Ellenismo è anche epoca di grandi contraddizioni. A fianco delle scienze si assiste all’altrettanto significativo fiorire delle “pseudoscienze”. Sarebbe ad esempio impensabile scindere astronomia ed astrologia, che anzi si fondono e si confondono. Il fatto è anche in questo caso spiegabilissimo. L’incredibile estensione degli orizzonti geografici, in seguito alle conquiste di Alessandro, aveva reso innanzitutto molto più intensi gli influssi dell’Oriente, si pensi alle pratiche astrologiche e cabalistiche di caldei e babilonesi. Non solo, a un’analisi più profonda l’uomo greco, fino a quel momento abituato a confrontarsi con il modesto e rassicurante orizzonte della πόλις, si era trovato improvvisamente sbalzato in un impero sconfinato, in cui il proprio destino diventava improvvisamente incerto, non più riconducibile entro le linee della piccola comunità, in cui poteva partecipare attivamente alla politica e in una certa misura “farsi” il proprio destino. Ora questo è nelle mani di una volontà misteriosa, che l’uomo non può indagare se non attraverso gli oroscopi. Agli oracoli per il destino della città si sostituisce l’oroscopo per il destino del singolo.
Anche il poema didascalico in diretta corrispondenza cambia. Il nuovo poeta in generale non è più né filosofo, né tantomeno scienziato. E’ poeta, o meglio erudito. Gli argomenti che tratta non derivano da una sua riflessione diretta, ma per lo più dalla lettura di opere specifiche di quell’argomento (e sicuramente le nuove biblioteche ellenistiche ebbero un peso importante in questo senso). Il contenuto scientifico diventa così meno preciso, senza dimenticare la compresenza di quello “pseudoscientifco.”
Per quanto riguarda il panorama latino il discorso si fa meno lineare. Sono numerosi i poemi latini che possono essere considerati didascalici, dal “De agricoltura” di Catone, al “De rerum natura” di Lucrezio, alle “Georgiche” di Virgilio, sino addirittura all’ “Ars amatoria” di Ovidio. Ognuna di queste opere assume caratteri del tutto peculiari, impossibili da riassumere in una trattazione generale. Nonostante la loro indubbia importanza siamo costretti in questo lavoro a non farne più che un cenno e concentrare la nostra attenzione sui meno fortunati, ma più attinenti alla scienza, poemi astronomici.
In questo caso il riferimento immediato doveva sicuramente riguardare la didascalia ellenistica e in particolare i “Φαινόμενα” di Arato. L’opera, già tradotta da Cicerone, vedrà nell’età giulio-claudia una seconda traduzione, ad opera di Germanico: gli “Aratea”. Ma della medesima epoca è sicuramente il più originale e interessante dei poemi didascalici latini: gli “Astronomica” di Manilio, di cui tratteremo più diffusamente in seguito.
Il genere è sopravvissuto fino al 1500, quando, ormai svuotato di ogni significato, ha finito per scomparire.

Il dibattito: poesia o non poesia?

Le ragioni dell’adozione del verso nella tradizione didascalica sono varie: sicuramente nella prima fase il fatto non risulta sorprendente, se pensiamo come la poesia fosse in generale molto più sviluppata della prosa e di conseguenza più naturale per qualunque greco si accingesse a scrivere. Inoltre le conoscenze che l’autore trasponeva gli erano direttamente dettate dalle Muse, che parallelamente gli ispiravano anche la qualità artistica. Nella seconda fase del genere indubbiamente queste ragioni risultano svuotate del proprio

significato profondo, la forma poetica deve quindi collegarsi a ragioni di tipo diverso: la necessità mnemotecnica, così che i contenuti da insegnare restassero più facilmente impressi nella mente, e sicuramente il desiderio virtuosistico di dimostrare la propria bravura nel mettere in versi una materia genericamente considerata "arida". Che poi a partire da queste necessità estrinseche in alcuni casi i poemi siano approdati a risultati esteticamente notevoli, non è sicuramente da tralasciare.
Nonostante tutto questo, l'adozione del verso nella trattazione non sempre ha garantito al genere la qualificazione di genere poetico, a motivo dei vincoli imposti dalla materia trattata. In alcuni casi si è voluto escludere la poesia didascalica dall'ambito poetico, è ad esempio il caso di Aristotele, che nella Poetica rifiuta ad Empedocle il titolo di poeta, poiché non crea una realtà sua, ma discute quella naturale, pur non rifiutandogli decisi apprezzamenti, in particolare per lo stile omerizzante, immaginoso e spesso metaforico.[13]
Secondo Plutarco la poesia didascalica prende solo "a prestito" la forma poetica. E in fin dei conti la sua funzione era anche strettamente legata a quel "miscere utile dulci" lucreziano, quell' "addolcimento" (ἥδυσμα) esiodeo, utili a rendere meno arduo l'apprendimento. Un secondo filone di pensiero propende per un affiancamento della poesia didascalica al genere epico, parte per il metro utilizzato (l'esametro in entrambi i casi), parte per gli effettivi risultati stilistici. Vedremo come questa teoria sarà felicemente usata nella lettura dell'opera di Manilio. Infine in alcuni casi si è preferito ascrivere questi poemi a un genere a sé stante. Il Tractatus Coislinianus[14] ad esempio pone accanto alla poesia mimetica una poesia non mimetica, di cui fa parte anche la poesia educativa.
Il problema naturalmente resta irrisolto. Certo è che queste teorie sono espresse in versi, fatto che, per quanto dettato da motivazioni spesso strumentali, apparirebbe oggi sicuramente inadatto alla trattazione scientifica. Le opere risultano quindi molto interessanti per il lettore moderno, che, pure se le troverà in alcuni casi ingenue e infondate per i contenuti, ne apprezzerà i passi di vera poesia, raggiunti soprattutto quando l'autore si stacca dall'ambito strettamente della sua materia e istituisce rimandi con la sensibilità e la vita degli uomini del suo tempo e di quelli di ogni tempo.

Manilio e la poesia degli astri

Della persona di Manilio conosciamo ben poco, lo stesso nome nell'intestazione ai suoi libri è storpiato in vari modi. Per quanto fosse sicuramente conosciuto a Stazio, a Lucano, a Firmico Materno, che ne saccheggiò ampiamente l'opera, nessuno lo cita. Quintiliano non ne parla tra i poeti didascalici, Girolamo sembra non conoscerlo. L'opera, i cinque libri degli "Astronomica", sono una riscoperta umanistica di Poggio Bracciolini, del 1417. Nonostante ciò, Manilio è poeta non trascurabile, Goethe resterà addirittura colpito da alcuni versi del suo poema. A cosa dobbiamo dunque una così totale assenza di informazioni? Probabilmente allo stesso carattere dell'opera didascalica, che si diffuse per lo più in ambienti periferici e presso strette cerchie di pochi interessati all'argomento. Anche il fatto che non godette mai dell'attenzione scolastica ebbe un certo peso nella sua rapida scomparsa. Certo non contribuì infine il clima di tensione che si viveva a Roma dopo la morte di Augusto, un clima di continui sospetti e di repressione.
Si ritiene in effetti di poterlo collocare tra la fine dell'età augustea e l'inizio di quella tiberiana, anche la questione cronologica è ancora aperta.[15] L'unica certezza è un *terminus post quem*, vale a dire la disfatta di Teutoburgo, rievocata da Manilio stesso.

---

[13] *Poetica,* 21,6
[14] Manoscritto riguardante la teoria della Commedia in Grecia
[15] Qualcuno ritiene di confinarlo alla sola età augustea, altri alla sola età tiberiana

Manilio non è uno scienziato, dice genericamente di rifarsi a fonti greche per quanto riguarda i contenuti, ma rivendica orgogliosamente il proprio primato latino, quale *inventor* del genere astronomico. Il grande modello è sicuramente il Lucrezio del *De rerum natura* , anche se, come vedremo, l'impostazione filosofica è opposta.
L'opera consta di cinque libri, sebbene già dal 1600 si avanzasse l'ipotesi dell'esistenza di un sesto libro andato perduto. Gli "Astronomica" si aprono con un proemio, tipico del genere epico-didascalico, costituito da una *propositio*, un'*invocatio*, e un'*amplificatio.* Ma non esiste più la Musa, l'invocazione è al princeps, in relazione al nuovo ruolo che l'imperatore sta assumendo, di dominio su ogni ambito della vita dei suoi sudditi e di quasi divinizzazione. Segue nel I libro una descrizione del cosmo, dalle sue origini a stelle, pianeti, comete; il II tratta i vari segni dello zodiaco e le loro congiunzioni, il III introduce i metodi per determinare l'oroscopo, il IV analizza l'influsso dei segni zodiacali sui caratteri umani, il V esamina i segni extrazodiacali. Come risulta evidente, la pseudoscienza era quasi dominante.
Ma gli Astronomica di Manilio si rivelano opera più profonda e interessante anche sul piano filosofico. La concezione del mondo non è più epicurea, come lo era quella lucreziana, ma stoica. Manilio vede nella natura il disegno di una ratio superiore, che unisce le diversità, ma che nello stesso tempo le rispetta, valorizzandone l'individualità e le differenze. Anche la pseudoscienza è letta e legittimata sotto questa nuova luce: il fatto che la natura sia governata da una *ratio* completamente estranea al caso rende possibile, agli occhi di Manilio, che i destini umani siano misteriosamente legati al sistema delle stelle. Ci troviamo insomma di fronte a un poema didascalico più complesso, meno di maniera e più sinceramente sentito e profondamente inteso.
In ugual modo sarà necessario spendere alcune parole riguardo allo stile di Manilio, che, seppure di tanto in tanto incontri qualche difficoltà nella trasposizione latina di un lessico tecnico, risulta altresì in altri passi molto riuscito anche poeticamente, forse in quei passi che lo stesso Goethe ammirò. Secondo la lettura di Riccardo Scarcia[16] Manilio dovette moltissimo alla tradizione epica di età augustea. L'Eneide virgiliana ebbe una risonanza vastissima sin dai primi anni della sua diffusione e furono molti gli studiosi che ne iniziarono una vera e propria analisi ermeneutica. Scarcia crede di potervi inserire anche Manilio, il quale avrebbe desunto poi più o meno consapevolmente nella sua opera moltissimi degli stilemi della poesia epicizzante. "Lo statuto stilistico del poema didascalico si altera giocoforza e vede accentuarsi la sua qualità epica. Con queste sue procedure di arricchimento stilistico, Manilio eleva la tonalità didattica al registro sublime dell'epos."
Caratteristica stilistica che avvicina i due generi è ad esempio il gusto per la similitudine. Virgilio in particolare rivela un'attenzione tutta alessandrina per le similitudini che si rifanno ad ambiti della vita quotidiana, "minuziosamente naturalistici". Una simile sensibilità è propria anche dell'opera di Manilio, riferita in questo caso al dato scientifico. Riportiamo a titolo d'esempio un passo del I libro in cui l'autore si propone di descrivere la Via Lattea (I, 705-707):

"*ac veluti viridis discernit semita campos*
quam terit assiduo renovans iter orbita tractu
inter divisas aequalibis est via partes."

---

[16] Introduzione a *Manilio. Il poema degli astri.* Milano 1996

"e come spicca un sentiero tra il verde dei campi
che le ruote logorano con l'assiduo attrito d'un ripetuto passaggio
pari gli è quella via tra lo spazio spartito."

In cui il terrestrissimo campo solcato da un carro è in stridente contrasto con l'etereo ambiente celeste, ma riesce a renderne l'immagine in mondo veramente vivace ed incisivo.

Anche la poesia insomma, pur riferita al dato scientifico, appare più profondamente intesa e funzionale all'intento dell'autore, non solo gioco virtuosistico, non solo vuota forma. E d'altra parte non c'è ragione per cui non dovremmo credere alle parole di Manilio, che dichiara all'inizio del poema la propria devozione per due altari: quello della poesia e quello della natura (I,20-24):

"Bina mihi positis lucent altaria flammis,
ad duo templa precor duplici circumdatus aestu
<u>carminis et rerum</u>:certa cum lege canentem
mundus et immenso vatem circumstrepit orbe
vixque soluta suis immittit figuris."

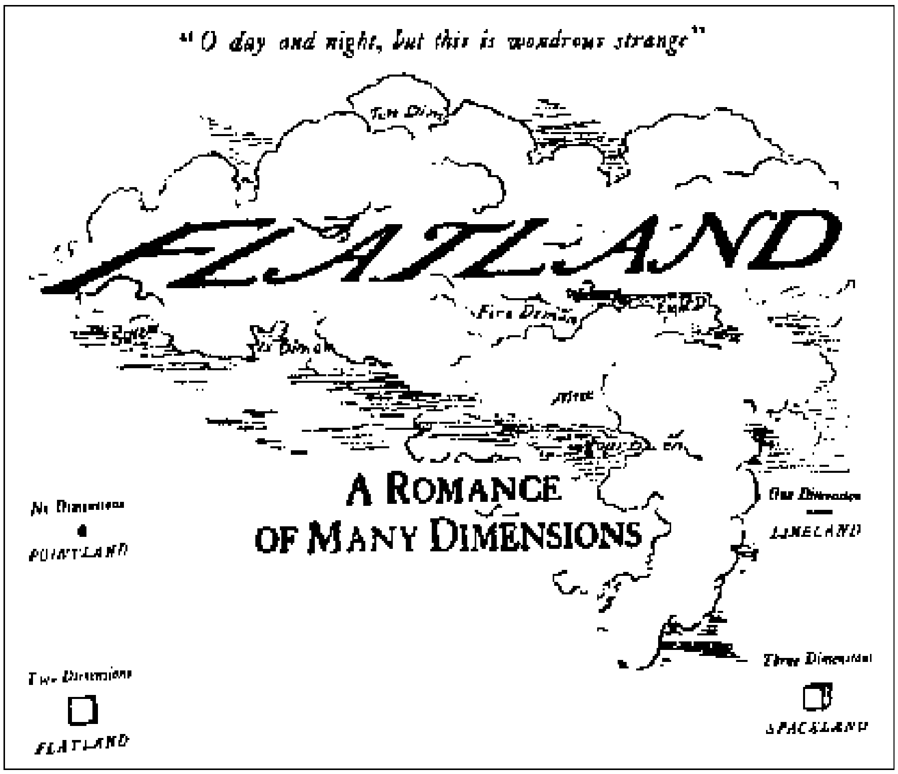
"Due altari per me rilucono di fiamme compostevi, supplice
guardo a due templi, avvolto da duplice calore: <u>della poesia</u>
<u>e della natura</u>. Al vate che canta con fisse misure è intorno
il fragore dell'universo nel suo orizzonte immenso, che poco
anche in parole prive di legge consente di calare le sue forme."

Per Manilio non possiamo più trattare il genere didascalico in termini puramente formali e strutturali. L'autore si sente inserito in un mondo stoico, governato da una *ratio* certa e che anche l'uomo è in grado di comprendere ed esprimere mediante la propria *ratio*, fondamentale tanto per la conoscenza quando per la realizzazione poetica. Non c'è distinzione, non c'è stacco tra i due altari, tutti e due sono consacrati alla medesima e altissima ragione umana.

Il problema della "pluridimensionalità", come abbiamo avuto occasione di riscontrare più volte, nell'ovvia difficoltà di rappresentazione visiva che comporta, ha spesso indotto i matematici a fare uso, per comprenderlo, dell'*analogia*. Inevitabilmente i buffi personaggi che sono nati da queste rappresentazioni hanno stuzzicato anche la fantasia letteraria, che li ha resi protagonisti di avventure e romanzi. E' il caso (molto fortunato) di Flatlandia, di Edwin A. Abbott.

FLATLAND: A JOURNEY TO THE DISCOVERY OF MANY DIMENSIONS

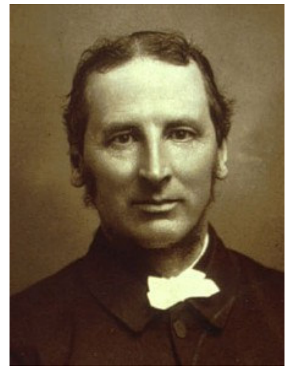
Considerations about the novel written by Edwin A. Abbott



...Mathematic Reason and Imagination will help to reveal the Truth…

"Flatland: a romance of many dimensions" is one of the most worldwide known and appreciated novels, which concern with Mathematics and Scientific subjects. Written by Edwin Abbott Abbott and published anonymously in 1882, the book is even more read in the present, when, after the appearance of new revolutionary scientific theories, the problem of dimensions has become topical and necessary to understand the laws which regulate our Universe. From this point of view Abbott's work can be rightly considered an incredible precursor of modern theories, which he could anticipate with only the use of the reason and imagination. But Flatland isn't a mere treatise of Geometry, it is at first a story: the fantastic, ironical, adventurous story of a world, absurd and paradoxical, but strangely not too different from ours.

Edwin Abbott Abbott: A life devoted to culture



E. A. Abbott

Edwin Abbott Abbott was born in London in 1838, son of Edwin Abbott, headmaster of the Philological School in Marylebone. He attended the St John's College in Cambridge, where he excelled in both Classics and Mathematics. He was also very interested in Theology and in 1862 he took orders. At the early age of twenty-six he became the headmaster of the City of London School. He reintroduced the traditional pronunciation of the Latin and promoted a Philology class, which reached the level of the best Colleges. In 1889 he retired and devoted his life to cultural pursuits. A biographer writes *"He burnt with intellectual energy"* . He considered culture a sort of religion. He wrote more than fourty books, dealing with the most different subjects. From education, to science, to philology, to theology. All his works are charachterized by an ironical and liberal way of analysing the world. He died in 1926.

Flatland: the story of a bidimensional world

" *Imagine a vast sheet of paper on which straight Lines, Triangles, Squares, Pentagons, Hexagons, and other figures, instead of remaining fixed in their places, move freely about, on or in the surface, but without the power of rising above or sinking below it, very much like shadows -- only hard with luminous edges -- and you will then have a pretty correct notion of my country and countrymen.*"

This is the simple and original idea at the basis of the book. The main character, which is also the narrator, is an argute square, called simply A. Square, who describes his world and his fantastic experience of discovering the third dimension. The book is distinctly divided in two very different parts. The first one deals with the precise and funny description of the features of Flatland, its inhabitants, and the institutions, which regulate their lives. In the second part a Sphere introduces A. Square to Spaceland and to other worlds. This bipartition isn't just a narrative device, but it reflects a precise intention of the author, which builds the story on two different sides, corresponding to two different aims, he wants to reach. These aims are explicitated in the dedication of the book. The book, as the Square says, is dedicated to the inhabitants of the Space, in the hope that they would aspire higher and higher to the secrets of five, six, even seven dimensions, thereby contributing "*To the enlargement of the **imagination** and the possible development of that most rare and excellent gift of **modesty** among the superior races of solid humanity*". Imagination is the quality which allows, with the contribute of

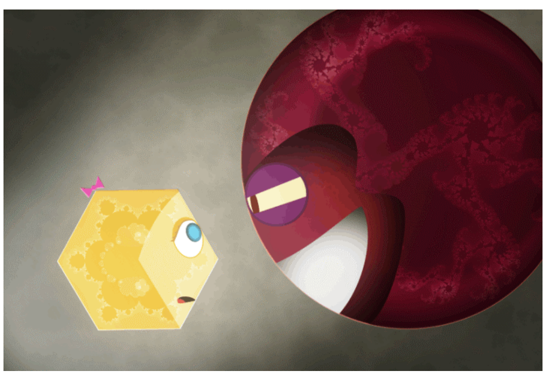
Two squares in their house in Flatland[17]

[17] Images are taken from *Flatland: the movie*, realized for an educational project, conceived by Jeffrey Travis, Dano Johnson and Seth Caplan with the contribution of Flat World Production

mathematic knowledge, to reach the truth, hidden from our sight. But the result isn't only an increasement of knowledge, it is also SOCIAL. The discovery of other dimensions shows that our world isn't the only one, which exists. We believe that we are the centre of the Universe, while we are just as the poor squares, triangles and other figures, confined in our dimension. We have to learn modesty, while increasing knowledge. And the narration of the square has an other social effect: the description of *his* society infact hides a deep and strong satire of *our* society.

Flatland as a satire of Victorian society

A part from the idea itself, the most remarkable thing about this novel is the incredibly precise description of an invented world. Life on a plane may seem quite impossible: figures can only slip on it and all they can see on their horizon is a line. Abbott ideates some genial devices and rules, which can regulate and make possible all aspects of this sort of life, with a precision which recalls the assiomatic and deductive approach of Mathematics. The inhabitants of Flatland are polygons, whose social class depends on the number of their sides. The Triangles, who have only three sides, are the bottom of social ladder, while the Priests are multi-sided polygons and they approximate circles, which are considered the perfect figures. The population can evolve thanks to the fact that nature states that a male child should have one more side than his father. The situation is different for irregular figures and women. Only regular polygons have rights in this society, while irregular ones are subjected to a severe regulation. In particular Isoscel Triangles can't evolve and are confined to their social class. They are very dangerous, since their angle is very sharpened, but they are generally unintelligent too. The laws of nature state that if a Triangle became cleverer than usual, his shape would change into an Equilater, so there is no possibility of liberation for Isosceles. But the condition of women is even worse. They are so thin triangles, that they approximate lines, the result is that in some positions they are seen as points and disappear. They are also very dangerous, so they are required by law to sway back and sound a "peace cry", as they walk. But the most interesting thing is that they are considered inferior to male figures, because they develop in their personality Emotion more than Ration. "*About three hundreds years ago, it was decreed by the Chief Circle that, since women are deficient in Reason but abundant in Emotion, they ought no longer to be treated as rational, nor receive any mental education.*" Each figure in Flatland appears as a line, if seen by an other plane figure. They can recognize people by touching each other, or by the superior " Art of Sight Recognition". The more evolved figures in fact can determine the depht of an object thanks to the presence of fog, which is very common in Flatland. Even though they can't see nothing more than lines, they can *infer* angles and other geometrical concepts with great precision. But Abbott sketches these figures and their society with so great abundance of particulars, that it's really impossible to summarize it. The incredible fact is that it's very similar to ours. Many readers of Flatland have considered the book a sort of satire of Victorian society, as it was during Abbot's life, and a satire of societies in general, as they are also now. The greatest of problems of Flatland is the condition of life for women. We must say that Abbott was a supporter of equality of educational opportunity, in particular for women. For the truth at

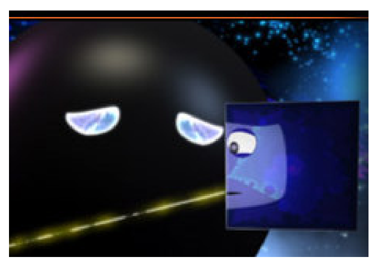


A little Hexagon frightened by a "Quite-Circle" that time women could get an education, but it was very difficult for them to be accepted into Universities and Abbott's daughter had experienced it. Abbott recognized also the existence of two different cultures. Men represent the rational and scientific one, while women the emotional one. Even though the narrator (which is a male figure) apparently approves his society and agrees with the point of view of the majority, we understand that the position of the author is different. And it's expressed by the words of the Sphere, who introduces a doubt, the possibility of a different point of view: "*It is not for me to classify human faculties according to merit. Yet <u>many of the best and wisest in Spaceland think more of the affections than of the understanding</u>, more of your despised Straight Lines than of your belauded Circles."* An other interesting satirical element is the position of Irregular figures. In Victorian Society omologation was the basis of civil life. Irregularities, unusual behaviours, were always connected with criminal tendencies and deviant personalities. Frequently these unusual people were segregated into asylums, which had viewing gaileries, where ordinary people could see them. Abbott exaggerates the situation to highline the absurdity of this conception: irregulars are eliminated in Flatland society ore used as objects in schools to be studied by regular pupils. Then they are left to starve to death. The satirical intent is even too evident in this page. In the end he deals with the problem of freedom of thought and expression. In fact the Square is imprisoned because he had revealed the existence of an other world, which may have the consequence of troubling their static society. Which solution does Abbot propose? An incrementation of modesty in people, who are no more than points or figures in the immensity of space.

A square: a second Prometheus in the discovery of Space

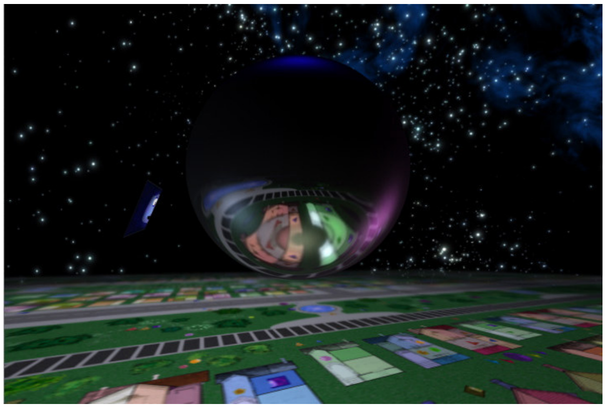
"Either this is madness or it is Hell." "It is neither," calmly replied the voice of the Sphere, "it is Knowledge; it is Three Dimensions"

The adventurous part of the book begins with the appearance of a strange visitor in the home of A. Square, on the first day of the Third Millenium. The night before A. Square had had a singular dream. He had dreamt about a one-dimensional world, Lineland, where beings are segments on the same straight line. Their horizon is only a point and they communicate by using sounds, since they can't change their position on the line. A. Square tries to reveal to the Monarch of this world the existence of the second dimension, but he discovers that it's impossible make him realize that his line isn't the entire world. "*He was persuaded that the Straight Line which he called his Kingdom, and in which he passed his existence, constituted the whole of the world, and indeed the whole of Space. Not being able either to move or to see, save in his Straight Line, he had no conception of anything out of it.*"



A. Square staring to Lineland

The day after A. Square receives the visit of a strange figure: a perfect Circle, who can change his measures and even disappear from the world! After a moment of terror, Sphere tries to explain that he comes from the tridimensional space, Spaceland. At the turn of each millenium he visits Flatland to introduce a new apostle to the idea of the third dimension, which becomes a sort of religion. The dialogue between the two is very funny: A.Square has the same reactions that the Monarch of Lineland had had in the dream. His world is the only possible, there can't be a superior one! Sphere tries to persuade the square in many ways, especially with geometrical reasons, but in the end he has to demonstrate the truth by facts. He "picks up" the square and he leads him to Spaceland. From the space they can look at Flatland, seeing all the inhabitants of Flatland and their "interior". Square is persuaded and finds himself in great excitement. Then, there would be also the fourth, the fifth, and so on, dimensions, they could discover new worlds, just imaging them. The reaction of the Sphere is strange, but not completely unexpected for the readers: the Sphere can't believe in the existence of a fourth dimension, he thinks that his world is the highest and nothing superior can exist. his reactions is the same the Line and then the Square had had. Each being thinks himself to be the perfection of the existence, while there is always something more. Offended by this idea the Sphere returns A.Square to Flatland in disgrace. There he tries to explain the third dimension to the other figures but he isn't believed, he is persecuted and imprisoned. He says that he feels like a new Prometheus, but he has brought nothing to his countrymen. His existence is now condamned to unhappyness. Everyone lives alike a slave of his own dimension, but he is happy in the belief that his world is the only possible one. Knowledge means necessarily also unhappyness. Nevertheless the message of the author is a deep and hearty eulogy of knowledge: the only way to gain freedom is to reach Knowledge, by using both Ration and Imagination, and to spread it.



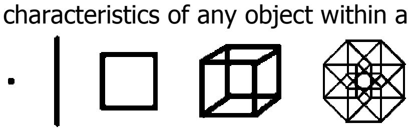
A. Square and the Sphere flying up on Flatland

"Learn this lesson, that to be self-contented is to be vile and ignorant, and that to aspire is better than to be blindly and impotently happy".

There's only a question left. Did really Abbott believe in the existence of other dimensions? Considering the period of his life, probably not. Well, he didn't believe in the real existence of Pointland, Lineland, Flatland, and so one. But he firmly believed in the existence of an other world: Thoughtland. At the end of the book A.Square feels that also his world is just a dream. It is not important. The important thing is to develop the faculty of Imagination and build new possible worlds with the help of reason, even though they are the baseless fabric of a dream.

DIMENSIONS IN MATHEMATICS

In mathematics, **dimensions** are the parameters required to describe the position and relevant characteristics of any object within a conceptual *space*. So the *dimensions* of a space are the total number of different parameters used for all possible objects considered in the model. In the figure (*on the left*) are represented models of a-dimesional, one-dimensional, bi-dimensional,three-dimensional and an approssimation of a four-dimensional figure. Traditionally we consider Time as a fourth dimension, since it is necessary to collocate a thing or an event.



This concept has become central in studies after the birth of non-Euclidean geometries and the new physical models of the Universe.

IL MERAVIGLIOSO (E MATEMATICO) MONDO DI ESCHER

"For me it remains an open question whether [this work] pertains to the realm of mathematics or to that of art."

"Per me rimane una domanda aperta se questo lavoro appartenga al dominio della matematica o a quello dell'arte"

M.C. Escher

Autoritratto
litografia,1948

Matematica o arte che sia, la suggestione che investe l'osservatore di un'opera di Escher, il senso di vertigine e di perdita nell'immagine, sono tanto fortemente avvertiti da insinuare un'altra domanda. Da dove Escher è in grado di trarre la forza immaginifica e la portata di originalità che prorompe in tutti i suoi disegni? In un primo momento, è lo stesso autore a narrare di sé, si trattava preminentemente di un gioco virtuosistico, di una sfida ad applicare la propria tecnica a soggetti sempre più arditi. Da un certo momento in poi, tuttavia, le parti si sono capovolte, il soggetto dell'opera ha preso il sopravvento sull'artista: l'immagine, che nasceva come *mentale*, obbligava lo stesso Escher in un impeto violento a trasporla sulla carta, a renderla immagine *fisica*. Il mondo, nelle sue forme bizzarre, nelle sue simmetrie spettacolari, nei suoi paradossi incomprensibili, costituiva il bagaglio inesauribile da cui tali immagini prendevano vita.

"*Le idee che stanno alla base della mia opera derivano dalla mia ammirazione e dal mio stupore nei confronti delle leggi che regolano il mondo in cui viviamo. Chi si meraviglia di qualcosa si rende consapevole di tale meraviglia. Nel momento in cui sono aperto e sensibile nei confronti degli enigmi che ci circondano, considerando e analizzando le mie osservazioni, entro in contatto con la matematica. (..) Mi sento spesso più vicino ai matematici che ai miei colleghi artisti."*

La domanda è lasciata aperta da Escher perché la risposta non si accorda a nessuna delle due possibilità. L'opera di Escher non appartiene né al dominio della matematica, né al dominio dell'arte: appartiene al dominio della natura, del mondo in cui viviamo, che nella sua misteriosa bellezza scientificamente regolata costituisce, così come l'opera di Escher, il più alto esempio di compenetrazione di matematica e arte. Un mondo filtrato però dalla mente dell'artista, in un percorso fatto di curiosità, meraviglia, spregiudicatezza e coraggio. Deformato dal filtro intellettuale il mondo si trasforma in visione interiore.

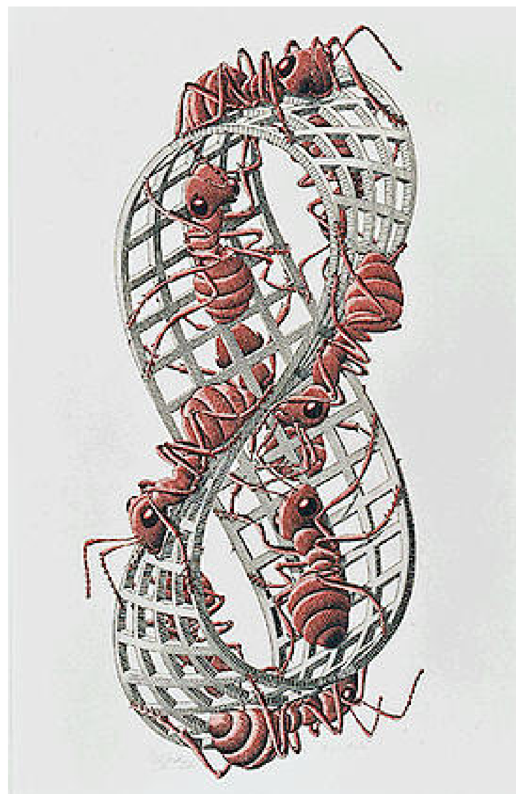
La vita

Maurits Cornelis Escher è uno dei più famosi grafici e illustratori moderni. Nasce a Leeuwarden, nei Paesi Bassi, nel 1898. Indirizzato alla carriera di architetto, sulle orme paterne, dal 1919, frequenta la Scuola di Architettura e Arti Decorative di Haarlem, ma ben presto abbandona il ramo architettonico e si dedica unicamente alle arti decorative. Nel 1922 viaggia in Italia e in Spagna, qui rimane colpito dall'Alhambra di Granada, famoso palazzo moresco del Trecento. Vi conosce in particolare gli arabeschi che adornano gli interni e che spesso sono caratterizzati da motivi grafici ricorsivi, un tema che Escher svilupperà nelle sue tassellazioni. Vive per alcuni anni a Roma, finchè, in seguito al pesante clima politico dell'Italia fascista, si trasferisce in Svizzera, in Belgio e infine in Olanda. E' qui che Escher si specializza nell'incisione su legno, nelle litografie e nelle mezzetinte, e che realizza la maggior parte delle sue opere. Inizia a servirsi di blocchi di legno dalla superficie più dura, che gli permettono di tracciare delle linee sempre più sottili. Fino al 1950 rimase pressochè sconosciuto, ma in seguito a un'esposizione del 1956 e alla favorevole recensione sul Times la sua fama si diffuse ben presto in tutto il mondo. Tra i suoi maggiori ammiratori vi erano scienziati e matematici, estasiati nel vedere artisticamente interpretati alcuni degli oggetti del loro studio. Muore nel 1972 in una casa di riposo per artisti, dove potè lavorare fino agli ultimi giorni della sua vita.

Cerchiamo ora di analizzare alcune delle opere più belle di Escher, che rivelano i principali filoni di studio cui si dedicò nel corso della sua esperienza artistica.

Superfici particolari: il nastro di Moebius

Intorno agli anni '60 del 1900 una superficie particolare dovette colpire l'immaginazione di Escher, ricorrendo, infatti, in modo più o meno consapevole, in numerosi disegni di questo periodo. Si tratta del nastro di Moebius, protagonista di *Nastro di Moebius II,* una delle opere meritatamente più famose dell'intera produzione dell'incisore. Ancora prima della curiosità per le proprietà matematiche del nastro raffigurato, a colpire l'osservatore è la dinamicità delle graziose formichine, che arrancano pazientemente, una dietro l'altra, su questa piccola superficie. Ma per afferrare il più profondo simbolismo della raffigurazione è necessario osservare con maggiore attenzione le proprietà geometriche del Nastro di Moebius, una delle figure più studiate in Topologia e Matematica. Se seguiamo con lo sguardo il percorso delle formiche, ci accorgeremo infatti che non stanno camminando su lati opposti, come potrebbe apparire a prima vista, ma passano da un "lato" all'altro senza nessun "salto". Perché questa superficie ha tanto colpito l'immaginazione di Escher e di molti altri artisti? Max Bill, celebre artista svizzero, ha scritto a proposito dei nastri di Moebius:
"*Sono convinto che la loro efficacia stia in parte nel loro valore simbolico; essi sono modelli per la riflessione e la contemplazione*". In primo luogo a conquistare l'artista è proprio il fascino intellettuale dell'illusione ottica, di quelle immagini che dietro l'ingannevole apparenza rivelano una verità diversa, comprensibile solo in seguito all'attenta riflessione. E' a questo punto che la contemplazione dell'opera può mostrare in modo più chiaro anche



Moebius band II
Xilografia, stampa da tre piastre, 1963,
45 x 20 cm.

la drammaticità del percorso infinito che le povere formiche sono destinate a compiere in eterno, ciclico, sempre uguale, nella misera finitudine del loro piccolo nastro di Moebius.
Un fatto curioso è che, proprio a motivo della dinamicità che suggerisce, è stata una delle prime immagini a essere animate con Computer Graphics.

Matematicamente il nastro di Moebius è una superficie non orientabile, dotata di una sola faccia. Una sua proprietà curiosa è che, se tagliata lungo una linea chiusa posta a distanza costante dal bordo, non si separa in due anelli distinti, ma resta connessa. Si ottiene quello che è definito Bi-nastro di Moebius e che Escher stesso rappresenta in una sua incisione (*a lato)*. Qui sono i pesci i protagonisti dell'opera, ognuno dei quali morde la coda dell'altro. Al terzo taglio si ottengono due anelli concatenati tra loro. Costruire un anello di Moebius è, tra l'altro facilissimo: è sufficiente incollare le due estremità di una striscia di carta, dopo aver fatto compiere ad una delle due una mezza torsione su se stessa.

Moebius band I

Semplicissimo da costruire, eppure sempre affascinante, la forma sinuosa e continua del nastro di Moebius ha suggerito spunto per nuove idee non solo agli artisti, ma anche ad architetti, scultori, prestigiatori e persino gioiellieri. In Cina è stato progettato il binario di un trenino proprio a forma di nastro di Moebius.

Il nastro di Moebius in letteratura
Il semplice anellino ha colpito anche la fantasia degli scrittori. Nel 1950 un insegnante di Harvard, Armin J. Deutsch, ha pubblicato il breve racconto *Una Metropolitana chiamata Moebius* (*A Subway named Möbius*). Il protagonista è un treno metropolitano di Boston, che, seguendo un intricato percorso, finisce paradossalmente in una striscia di Möbius, formata da binari intricati, senza più poterne uscire.

Confusione di dimensioni

"Non posso fare a meno di prendermi gioco di tutte le nostre certezze incrollabili. E' molto divertente, per esempio, confondere deliberatamente due e tre dimensioni, il piano e lo spazio e scherzare con la gravità".

M.C. Escher

Non è la prima volta che in questo lavoro parliamo di dimensioni, e non sarà nemmeno l'ultima. Evidentemente è una questione che colpisce facilmente la fantasia, invitandola all'arduo tentativo di immedesimarsi in dimensioni diverse dalla propria. A maggior ragione agli occhi dell'artista figurativo il problema delle dimensioni e della rappresentazione dello spazio diventa ineludibile e quanto mai affascinante. Dover riprodurre su una superficie bidimensionale oggetti che appartengono allo spazio tridimensionale impone necessariamente l'uso di determinati artifici di prospettiva. Lo stesso autore spiega:

"*Il nostro spazio tridimensionale è l'unica realtà che conosciamo. Il bidimensionale è una finzione come il quadridimensionale, poiché nulla è piatto, neanche lo specchio più levigato. (..) Non vi sembra assurdo, a volte, il fatto di disegnare un paio di linee e affermare: questa è una casa?"*

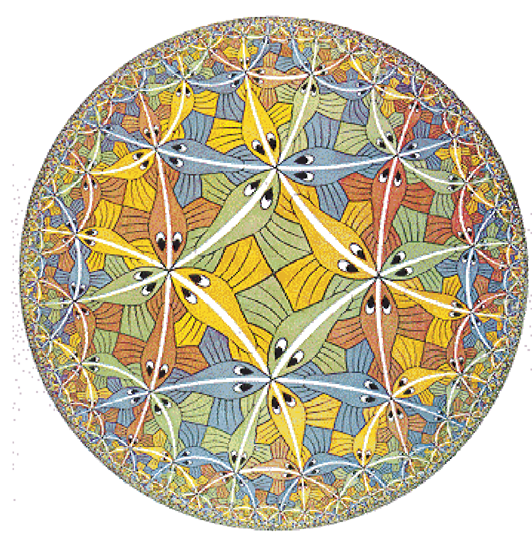
Escher si diverte a giocare con queste convenzioni, stravolgerle e immaginare fantastici rapporti tra realtà dimensionalmente diverse.

Reptiles
Litografia, 1943, 33.5 x 38.5 cm.

In *Rettili* il gioco dimensionale è funzionale alla narrazione di una storia: la paradossale vicenda di un rettile bidimensionale che scopre la terza dimensione. E' lo stesso Escher a suggerirci di leggere la sequenza di esseri uguali, tridimensionali, come unico personaggio in processo dinamico. Tra oggetti di ogni tipo (una bottiglia con bicchiere, libri, piante,.. persino un dodecaedro, solido geometrico regolare!) si può scorgere un foglio, decorato con un mosaico formato da rettili perfettamente incastrati l'uno con l'altro. Parrebbe una di quelle tassellazioni che Escher amò moltissimo e cui si dedicò per un'ampia sezione della sua produzione. Sennonché, dal lato destro del disegno, avviene qualcosa di singolare: uno dei rettili, ancora "spiaccicato" sul foglio per una parte del suo corpo sta iniziando ad estendersi nella terza dimensione! Del tutto liberato dalla sua prigione bidimensionale inizia un vero e proprio viaggio di esplorazione dei volumi, dal parallelepipedo del libro, al piano inclinato triangolare, al dodecaedro, fino alla concavità di un vasetto. Le raffigurazioni degli animaletti sono di vivacità sorprendente: da quello che goffamente cerca di scalare la costa del libro, a quello che lancia uno sbuffo verso l'alto, dopo aver conquistato la vetta del dodecaedro. Ma il suo destino non può cambiare. Mentre la coda dell'ultimo animaletto ancora si muove nella terza dimensionale, la sua testa torna ad essere confinata nella collettività cristallizzata ed immobile della bidimensionalità.

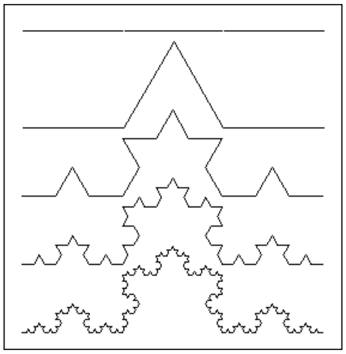
La ricerca dell'infinito e il preannuncio dei frattali

"*Se si vuole rappresentare un numero infinito, bisogna rimpicciolire gradatamente le figure fino a che si è raggiunto, almeno in teoria, il limite dell'infinitamente piccolo"*



Circle limit III, xilografia, 1959

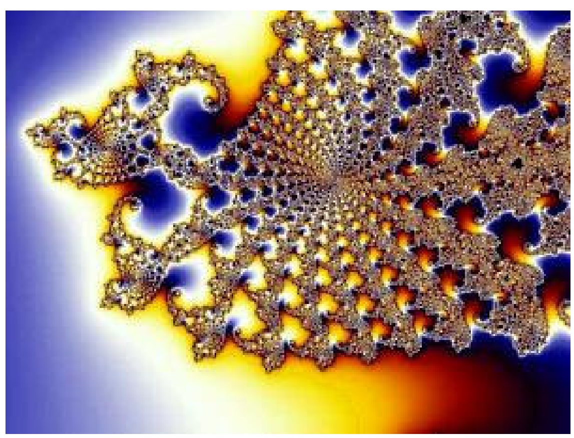
Gli anni che vanno dal 1956 al 1970 individuano nella produzione di Escher quello che è stato definito "il periodo dell'infinito". In *Limite del cerchio III* archi di circonferenza bianchi si intersecano, dividendosi in parti, ognuna delle quali ha la lunghezza di un pesce, segnando anche le corsie su cui si situano delle file di pesci. Ogni fila comprende pesci di un unico colore e, partendo dall'infinitamente piccolo, passa alla grandezza massima, per tornare ancora all'infinitamente piccolo. La perfezione con cui i pesci si incastrano, la brillantezza dei colori e l'armonia complessiva sarebbero di per sé sufficienti a fare dell'opera un vero e proprio capolavoro. Ma, come sempre in Escher, anche in questo caso un interessante sostrato matematico è alla base del lavoro. Quello che è rappresentato è infatti, matematicamente parlando, una raffigurazione di uno spazio iperbolico non-euclideo, il cui modello è dovuto a Poincarè. Per capire di cosa si tratta dobbiamo immaginare di proiettarci anche noi sul disegno. Immaginiamo di voler camminare dal centro al bordo della raffigurazione, mentre camminiamo siamo però sottoposti come i pesci alle leggi di questo spazio e ci rimpiccioliamo sempre di più!



Esempio di procedimento di costruzione di un frattale

L'immediata conseguenza è che dovremo percorrere un percorso che dalla nostra prospettiva ci apparirà **infinito**. Ecco dunque in che senso Escher raggiunge l'obiettivo che si era prefissato, vale a dire rappresentare l'infinito.

L'opera è stata per la verità anche letta come una sorta di rappresentazione *ante litteram* della geometria dei **frattali**. Si tratta di enti geometrici che si pongono come intermedi tra quelli monodimensionali e quelli bidimensionali. Vengono definiti attraverso procedure ricorsive, sostituendo una parte dell'oggetto frattale con il medesimo ente geometrico ridotto di un fattore 3. (*vedi figura).* Il procedimento, in linea teorica, tende all'infinito. Come è evidente è davvero molto simile all'operazione di rimpicciolimento progressivo operata da Escher. Le figure che ne derivano sono famose per la loro bellezza quasi artistica. E' un caso in cui non è l'arte a citare la matematica, ma la matematica a "fare" un po' di arte:



Dettaglio di un insieme di Mandelbrot.

La varietà delle forme è sorprendente, se pensiamo che la sua equazione matematica è semplicissima:

z=z^2+c

Figure impossibili

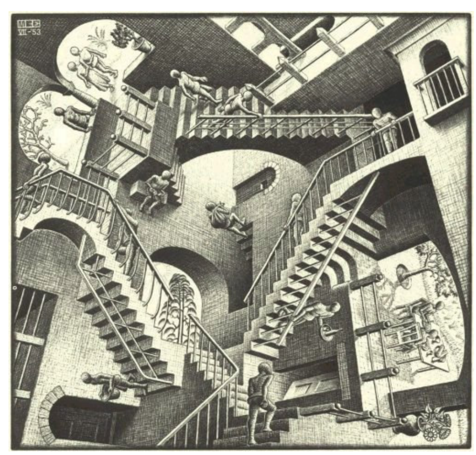
"*Ho giocato ad un gioco, mi sono sbizzarrito in immagini mentali con nessun altro scopo se non quello di indagare le possibilità della rappresentazione stessa."*

M.C. Escher

Abbiamo già potuto osservare come Escher fosse interessato al necessario rapporto tra realtà tridimensionale e "finzione" bidimensionale, vale a dire come si rendesse conto che nel passaggio di dimensioni fosse inevitabile la perdita della realtà. Di fronte a questo ostacolo artistico il grande incisore olandese si è sempre divertito a stravolgere le convenzioni e rappresentare le proprie costruzioni mentali, piuttosto che le approssimazioni di quelle reali. Da questo proposito sono derivate tutte quelle incisioni accomunate dall"impossibilità fisica della loro esistenza. L'aspetto più affascinante di queste è che per un singolare effetto ottico al primo colpo d'occhio non appaiono assolutamente impossibili, e solo ad un'osservazione più attenta (ma questa è necessaria per tutte le opere di Escher) ci si rende conto del loro paradosso. Per molte di queste opere diventa fondamentale la lettura guidata che ne ha fatto lo stesso Escher, per poter notare particolari ed enigmi che probabilmente sarebbero altrimenti ignorati. *Belvedere* è uno dei più famosi esempi di edificio impossibile. A prima vista nulla di strano appare nella rappresentazione, un po' inquietante, dell'edificio sul mare in burrasca. Ma percorriamo l'immagine con più attenzione. Un foglio a terra, nell'angolo sinistro, riporta il disegno biimensionale di un cubo, con due cerchiolini sono evidenziati i punti in cui si intersecano le rette. Il ragazzo, seduto lì vicino su una panca, tiene in mano un cubo, o per meglio dire un'assurdità cubica. I lati si intersecano in modo impossibile infatti e il ragazzo lo osserva pensieroso. Probabilmente non sa che l'edificio del Beldevere alle sue spalle è costruito secondo il medesimo principio. All'interno una scala conduce dal primo piano al secondo, ma i due personaggi che la stanno salendo, giunti in cima, si troveranno assurdamente al di fuori dell'edificio e dovranno rientrarvi. Il risultato è un'atmosfera surreale, l'edificio pare fuori dal tempo, così come persi in un'altra dimensione sembrano i personaggi che lo abitano. E allora in un paesaggio tanto inusuale, si chiede lo stesso Escher, è poi così strano che nessuna di queste figure si preoccupi del destino del prigioniero nel seminterrato, che, lamentandosi infila la testa tra le sbarre?

Belvedere
litografia, 1958

Anche la gravità è concetto preso di mira dall'originalità di Escher, che inventa mondi in cui sussistono contemporaneamente diversi centri di gravità. E' il caso di *Relatività* in cui punti di vista spazialmente diversi si intrecciano e convivono. I personaggi che salgono le scale in tutte le possibili direzioni nello spazio sono appena tratteggiati, sembrano quasi automi di un mondo diverso da questo e con leggi che lo governano opposte. Straordinaria è la rappresentazione della scala superiore, due personaggi la percorrono nello stesso verso, ma uno sta salendo mentre l'altro scende. Pur incrociandosi, ci dice Escher, i due non si incontreranno mai, perché appartengono a realtà gravitazionali diverse.



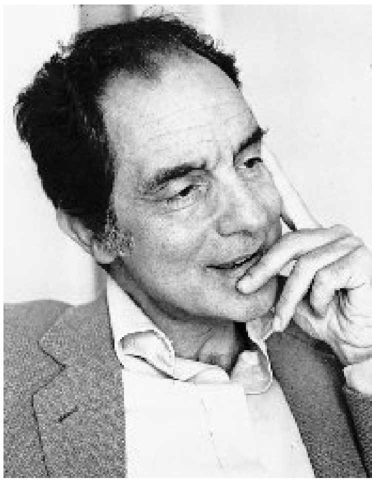
Relatività
litografia, 1953

.

LA LETTERATURA MODERNA: TRA SCIENZA E FANTASCIENZA

Italo Calvino: scienza e letteratura, collaborazione e complementarietà

"Quello che mi interessa è il mosaico in cui l'uomo si trova incastrato, il gioco dei rapporti, la figura da scoprire tra gli arabeschi del tappeto."[18]



L'interesse scientifico si affianca in Calvino alla passione letteraria, e anzi precede questa, sin dall'infanzia: il padre era agronomo di fama mondiale e la madre studiosa di scienze naturali e biologia. Sebbene la carriera di Calvino si muova in ambito strettamente letterario, la passione scientifica non lo abbandonerà mai facendone da un lato un appassionato lettore di testi di divulgazione scientifica, dall'altro una delle personalità più significative del Novecento che si sono battute per un'intensa collaborazione tra i due rami del sapere. Il dibattito intorno ai rapporti tra scienza e letteratura era per la verità diventato piuttosto vivace negli anni '60 del 1900, probabilmente anche in risposta alle nuove esperienze letterarie sorte intorno all' **Oulipo** e alla figura di Raymond Queneau, che tra l'altro Calvino tradusse e diffuse in Italia e per il quale nutrì sempre simpatia e ammirazione. In un articolo apparso su "Times literary supplement", dal titolo *Letteratura contro scienza,* Roland Barthes aveva concentrato il problema sul diverso approccio al concetto di linguaggio. Secondo Barthes il linguaggio in letteratura è fine a se stesso, non funzionale a comunicare un'altra realtà, mentre nella scienza è solo mero strumento atto alla trasmissione di una realtà ad esso estranea. A questa posizione risponderanno, confutandola, tanto Queaneau quanto lo stesso Calvino.

Calvino propone una visione del tutto interdisciplinare della cultura, in cui filosofia, letteratura e scienza devono collaborare e cercare di colmare i propri rispettivi limiti. Sia scienza che letteratura devono scoprire, esprimere e interpretare nuove visioni della realtà. Se la scienza si sta dirigendo sempre più verso una conoscenza specifica e settoriale, sarà compita della letteratura rispondere con una spinta unificatoria, rivelando nel loro complesso le sfaccettate forme della realtà. Dal canto suo la scienza farà conoscere alla letteratura nuovi campi in cui

OULIPO: OUvroire de LIttérature Potentielle

Fondato nel 1960 da Raymond Queneau e François Le Lionnais, l' "officina di letteratura potenziale" riunisce un gruppo di letterati interessati alle scienze esatte e matematici appassionati di letteratura, allo scopo di dare vita a originali e divertenti opere letterarie, costruite su strutture matematiche, usando per lo più una tecnica di scrittura vincolata. Per gli ovvi limiti intrinseci a queste costrizioni dell'opera letteraria, l'associazione è sempre stata avversa dalla grande maggioranza della critica. Alcuni letterati ne seppero tuttavia cogliere gli aspetti positivi di divertito gioco intellettuale. Tra questi lo stesso Calvino, che la definisce:

"*una specie di società segreta, una singolare consorteria di letterati con la passione della matematica e di matematici con la passione della letteratura, in cui domina il divertimento, l'acrobazia dell'intelligenza e dell'immaginazione, in cui si pensa e si parla attraverso ghiribizzi e capriole del linguaggio e del pensiero"*

[18] Le citazioni riportate in questo capitolo, se non specificato diversamente, sono tratte da Italo Calvino, "Due interviste su scienza e letteratura", in *Una pietra sopra* Milano 1995

l'immaginazione potrà spaziare e il modello del linguaggio matematico salverà lo scrittore dal "logoramento in cui sono scadute parole e immagini per il loro falso uso". Se davvero non potrà esserci una coincidenza tra i due linguaggi, ci sarà una sfida tra di loro.

"Non ci potrebbe essere nessuna coincidenza tra i due linguaggi, ma ci può essere (proprio per la loro estrema diversità) una sfida, una scommessa tra loro. In qualche situazione è la letteratura che può indirettamente servire da molla propulsiva per lo scienziato: come esempio di coraggio nell'immaginazione, nel portare alle estreme conseguenze un'ipotesi ecc. E così in altre situazioni può avvenire il contrario."

Del resto, secondo Calvino, se i linguaggi possono risultare inconciliabili, la materia di fondo, il contenuto, può non essere così dissimile. La tradizione italiana, dice, da Dante a Galileo ha sempre manifestato una tendenza per una descrizione dell'Universo, che in un senso o nell'altro ha saputo conciliare le due culture e trarre forza da tale connubio.

"anche Dante cercava attraverso l'opera letteraria di costruire un'immagine dell'universo. Questa è una vocazione profonda della letteratura italiana che passa da Dante a Galileo: l'opera letteraria come mappa del mondo e dello scibile, lo scrivere mosso da una spinta conoscitiva che è ora teologica ora speculativa ora stregonesca ora enciclopedica ora di filosofia naturale ora di osservazione trasfigurante e visionaria. (…)"

In epoca moderna il fatto è diventato più sporadico, e in corrispondenza a ciò, dice lo scrittore, la letteratura italiana ha diminuito la sua importanza. E' venuto il momento di riprendere questa illustre tradizione.
E' da queste istanze che nasce la stagione "scientifica" dell'arte di Calvino, in cui senza abbandonare il peculiare stile ironico, vivacissimo e fantasioso, pesca per la sua ispirazione nel multiforme universo delle scoperte scientifiche. Per lo più Calvino attinge all'ambito astronomico, cosmologico, biologico e fisico, che gli interessano in maniera peculiare, ma anche il concetto matematico di combinatoria e quello di probabilità lo affascinano moltissimo se applicati al susseguirsi degli eventi. Ne nascono una serie di lavori originali e accattivanti: *Le Cosmicomiche(1962), Le Citta` Invisibili (1962), T con Zero (1983), Palomar (1983) e Le Cosmicomiche Vecchie e Nuove (1984).*

Le Cosmicomiche

"Vorrei servirmi del dato scientifico come d'una carica propulsiva per uscire dalle abitudini dell'immaginazione"

In dodici brevi, incisivi racconti, editi per la prima volta nel 1962, Calvino realizza l'ideale di una nuova letteratura, che coopera con la scienza e da essa trae spunti fantastici.
Ogni racconto è preceduto da alcune righe, che ne costituiscono la premessa e spiegazione scientifica, la teoria da cui trae spunto. Il protagonista e narratore in tutti i racconti è un essere misterioso dal nome impronunciabile, Qfwfq, essere primordiale e camaleontico, che ha vissuto sulla sua pelle tutte le vicende del nostro Universo, dalla sua origine ad oggi. Camaleontico perché nei vari racconti muta forma a seconda della situazione, passando da punto, a dinosauro, a essere dalle fattezze (pseudo)umane. E' Calvino stesso a metterci in guardia dall'attribuire l'opera al genere fantascientifico: le Cosmicomiche non si proiettano verso un futuro in cui la scienza progredisca in nuovi e inaspettati modi, bensì verso un passato primordiale, quasi mitico, o verso un Universo immutabile ed eterno, di cui la scienza ha già avuto modo di parlare ampiamente e che ora investe anche l'ambito letterario. "Ognuno dei miei racconti", dice, "ha l'aria di fare il verso d'un mito delle origini".

Nonostante l'ambientazione surreale, quello che resta della nostra realtà nei racconti di Calvino sono i piccoli e gustosissimi dettagli della vita quotidiana, dell'uomo così come lo è oggi e come forse lo sarà in ogni tempo. E' questo aspetto che più di ogni altro, secondo me, rende unico il genere delle Cosmicomiche: nel viaggiare verso il lontano (geograficamente e temporalmente) e verso il complesso e in parte inesplorato (scientificamente), Calvino non può che riapprodare alla dimensione della vita quotidiana, dei suoi piccoli e buffi dettagli, dei suoi sentimenti contraddittori, di quelle che lo stesso autore definì "figure umane, o più particolarmente smorfie umane, borbottii umani", che rendono più vivo, più vero, letterariamente indimenticabile l'Universo cosmicomico in cui viviamo.

La forma dello spazio : una cosmicomica "relativistica"

Non potendo in questa sede trattare che uno solo dei racconti delle Cosmicomiche, nonostante la difficoltà della scelta, ho voluto farla ricadere su *La forma dello spazio,* che oltre ad essere, a mio avviso, una delle più riuscite, trae spunto da quelle teorie scientifiche su cui in questo lavoro abbiamo già avuto occasione di soffermarci: la teoria relativistica di un Universo curvo.

"*Cadere nel vuoto come cadevo io nessuno di voi sa cosa vuol dire*"

Qfwfq è un uomo, sia concesso il termine improprio, la cui esistenza è segnata da una terribile condanna: in un tempo indefinito, quando ancora l'Universo è praticamente vuoto e nessun corpo celeste è tanto vicino da esercitare una forza su di lui, Qfwfq cade in quest'oscuro nulla e della sua caduta nulla può dire, in assenza di punti di riferimento. La sua però non è una solitudine assoluta: a cadere con lui, su rette parallele, Calvino immagina altri due personaggi: la bella e irraggiungibile Ursula H'x e il buffo, quanto indisponente, Tenente Fenimore, per i quali Calvino spende la propria straordinaria abilità nel tratteggiare con poche indelebili pennellate due personalità complete e irripetibili. I rapporti che si instaurano tra i tre, nonostante le condizioni "inusuali" di vita, sono i più classici e immortali. I due uomini, nell'instancabile competizione per guadagnare le attenzioni di Ursula, si spendono nei più buffi e arditi tentativi di mettersi in mostra, per quanto gli è concesso dalla loro capacità di movimento entro una retta, salvo poi fingere totale indifferenza, quando, fallita l'impresa, l'avversario si compiace della sconfitta. Ursula dal canto suo non cura né l'uno né l'altro dei suoi pretendenti, preferendo rotolarsi sensualmente nel corso della sua caduta, e di tanto in tanto smaltarsi le unghie o strapparsi uno dei rari peli sulla gamba alla luce di una stella lontana. In un mondo euclideo le prospettive per i tre personaggi non sarebbero delle migliori: nessun cambiamento, nessuna possibilità di incontro, solo un'infinita e parallela caduta nel buio. Ogni tanto Qfwfq si concede di sognare e immagina allora che il mondo dopotutto non sia euclideo, che all'infinito le rette si potranno incontrare, e lui e Ursula vivere il loro amore. Per la verità nello stesso modo potrà incontrarsi alla loro anche la retta del tenente Fenimore e allora il sogno assume i caratteri dell'incubo e la dolce prospettiva amorosa quelli del tradimento e della sconfitta.
Per la verità a Qfwfq della struttura dell'Universo non interessa granchè, se non quello che può avere influenza sulla sua caduta e su Ursula H'x. Ma è proprio l'amore per la fanciulla che lo conduce, nelle sue elucubrazioni, all'incredibile comprensione dell'Universo: le masse provocano continue curvature, le rette non sono in realtà rette, ma si avvolgono e

attorcigliano, dando così la possibilità a Qfwfq di realizzare i suoi sogni, magari anche di affrontare i suoi incubi, ma in definitiva di vivere.
E' la conclusione, in cui Calvino realizza tutta il suo potenziale fantastico e immaginifico, tutta la sua poeticità nella prosa e nella scienza, tutta quell'arte insomma, che rende il brano palpitante, vivo, imperdibile.

"*Quelle che potevano essere pure considerate linee rette unidimensionali erano simili in effetti a righe di scrittura corsiva tracciate su una pagina bianca da una penna che sposta parole e pezzi di frase da una riga all'altra con inserimenti e rimandi nella fretta di finire un'esposizione condotta attraverso approssimazioni successive e sempre insoddisfacenti, e così ci inseguivamo io e il Tenente Fenimore, nascondendoci dietro gli occhielli delle "l" della parola "parallele", per sparire e proteggerci dalle pallottole e fingerci morti e attendere che passi Fenimore per fargli lo sgambetto e trascinarlo per i piedi facendogli sbattere il mento contro il fondo delle "v" e delle "u" e delle "m" e delle "n" che scritte in corsivo tutte uguali diventano un sobbalzante susseguirsi di buche sul selciato per esempio nell'espressione "universo unidimensionale" (..) e correre verso Ursula H'x la quale vorrebbe fare la furba infilandosi dentro i fiocchi delle "effe" (..) poi ci scaviamo una nicchia giù nel "g", nel "g" di "giù", una tana sotterranea (..). Mentre naturalmente le stesse righe anziché successioni di lettere e di parole possono benissimo essere srotolate nel loro filo nero e tese in linee rette continue parallele che non significano niente altro che se stesse e il loro continuo scorrere senza incontrarsi mai così come non ci incontriamo mai nella nostra continua caduta io, Ursula H'x, il Tenente Fenimore, tutti gli altri.*"


Tobia Ravà, *1001 fiborosa antioraria*, 2007

In questo lavoro non abbiamo imparato com'è veramente il nostro Universo, forse non sapremo mai se Qfwfq potrà coronare il suo sogno d'amore con Ursula, se potrà trovare nuovi mondi, o se anche noi come lui saremo per sempre costretti nella nostra esistenza. Abbiamo scoperto però che quando Scienza e Immaginazione lavorano insieme altri mondi si aprono davvero, se non altro nella Fantasia.

Bibliografia

Dante e la matematica

Libri:

Dante Alighieri, *La divina commedia, Inferno. Introduzione al poema, commento e letture di Emilio Pasquini e Antonio Quaglio*, 1998, Petrini Editore,Torino

Dante Alighieri, *La divina commedia, Paradiso. Introduzione al poema, commento e letture di Emilio Pasquini e Antonio Quaglio*, 1998, Petrini Editore,Torino

Bruno D'Amore, *Più che'l doppiar de li scacchi s'inmilla. Incontri di Dante con la Matematica,* 2001, Pitagora Editrice, Bologna

Horia-Roman Patapievici, *Gli occhi di Beatrice. Com'era davvero il mondo di Dante?,* 2006, Paravia Bruno Mondadori Editori, Milano

Url:

Galileo Galilei, *Due lezioni all'Accademia fiorentina circa la figura, sito e grandezza dell'inferno di Dante*, www.liberliber.it

Progetto Polymath, *Letteratura della scienza e scienza della letteratura*, http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Giu_04/APPUNTI.HTM

Geometrie non euclidee e relatività

Libri:

Thomas F. Banchoff, *Oltre la terza dimensione. Geometria, computer graphics e spazi multidimensionali*, 1993, Zanichelli Editore S.p.A.

Renato Betti, *Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, 2005, Paravia Bruno Mondadori Editori, Milano

Antonio Caforio, Aldo Ferilli, *Le leggi della fisica*, 2005, Felice Le Monnier, Firenze, pag. 352-386

Euclide, *Gli Elementi*, 2000, Unione Tipografico-Editrice Torinese, Torino

Url:

Paolo Lazzarini, *La geometria sulla sfera. Un approccio elementare alle geometrie non euclidee*, http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm

Poemi didascalici

Libri:

Gian Biagio Conte, Emilio Pianezzola, *Corso integrato di letteratura latina. 4. La prima età imperiale*, 2004, Felice Le Monnier, Firenze

Manilio, *Il poema degli astri (Astronomica). Volume I. Libri I-II. A cura di Simonetta Feraboli, Enrico Flores e Riccardo Scarcia*, 1996, Fondazione Lorenzo Valla, Arnoldo Mondadori Editore, Milano

Michael Von Albrecht, *Storia della letteratura latina. Da Livio Andronico a Boezio*, 1995-1996, Einaudi, Torino

M.C. Escher

Libri:

Maurits Cornelis Escher, *Grafica e disegni*, 2001, Taschen, Köln, Germania

Riviste:

Marco Bussagli, *Escher*, Art e Dossier, Inserto redazionale allegato al n.196 gennaio 2004, Giunti Editore S.p.A., Firenze-Milano, pag.5-9, 41-47

Url:

Platonic Realms Minitexts, *The mathematical art of M.C. Escher*, http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/

Alessia Vassalli, *La matematica nell'opera di Escher,* http://web.unife.it/progetti/geometria/Escher_A/index.htm

Flatland

Libri:

Edwin A. Abbott, *Flatlandia*, 1966, Adelphi Edizioni S.p.A., Milano

Url:

Flatland the Movie, www.flatlandthemovie.com

Calvino

Libri:

Italo Calvino, *Una pietra sopra*, 1995, Arnoldo Mondadori S.p.A., Milano

Italo Calvino, *Le cosmicomiche*, 2002, Arnoldo Mondadori S.p.A., Milano